

**СХІДНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ВОЛОДИМИРА ДАЛЯ**

Факультет інженерії

Кафедра електричної інженерії

ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

**до кваліфікаційної магістерської роботи
ступінь вищої освіти магістр**

галузі знань 14 Електрична інженерія

спеціальності 141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка

на тему Синтез робастної системи керування синхронним
двигуном з постійними магнітами

Виконав: студент групи ЕМС-21дм

Коженков Д. Ю.
(прізвище, та ініціали)

(підпис)

Керівник

доц. Руднев Є. С.
(прізвище, та ініціали)

(підпис)

Завідувач кафедри

доц. Руднев Є. С.
(прізвище, та ініціали)

(підпис)

Рецензент

(прізвище, та ініціали)

(підпис)

Київ 2022 р.

Східноукраїнський національний університет імені Володимира Даля
(повне найменування вищого навчального закладу)

Факультет Інженерії

Кафедра Електричної інженерії

Ступінь вищої освіти магістр

Галузь знань 14 Електрична інженерія
(шифр і назва)

Спеціальність 141 Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка
(шифр і назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри ЕІ

доц. Руднев Є. С.
“ ” 2022 року

З А В Д А Н Н Я
НА МАГІСТЕРСЬКУ РОБОТУ СТУДЕНТУ

Коженкову Дмитру Юрійовичу
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Синтез робастної системи керування синхронним
двигуном з постійними магнітами

керівник проекту Руднев Є. С. канд. техн. наук, доцент
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом вищого навчального закладу від “ 12 ” 10 2022 р. № 27/15.23-С

2. Строк подання студентом проекту 21 листопада 2022 р.

3. Вихідні дані до проекту Вихідні дані визначені в переліку питань, що підлягають
розробці в магістерській роботі

4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити) Аналітичний огляд. Методи синтезу робастних регуляторів. Синтез
робастного H_∞ -субоптимального регулятора швидкості. Розробка цифрової
математичної моделі робастної.

5. Перелік графічного матеріалу (з точним зазначенням обов'язкових креслень) плакати, що пояснюють суть магістерської роботи в кількості 19 шт.

6. Консультанти розділів проекту

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		завдання видав	завдання прийняв
1-5	доц. Руднев Є. С.		

7. Дата видачі завдання 05 вересня 2022 р.

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів дипломного проекту	Строк виконання етапів проекту	Примітка
1	Аналіз літературних джерел	1-2 тиждень	
2	Основні теоретичні відомості й деякі специфічні прийняття, використовувані в H_∞ -теорії	3 тиждень	
3	Методи синтезу робастних регуляторів	4-5 тиждень	
4	Синтез робастного H_∞ -субоптимального регулятора положення позиційного електропривода	6-7 тиждень	
5	Синтез та дослідження релейної системи керування електроприводом	8-9 тиждень	
6	Розробка цифрової математичної моделі робастної САК і дослідження синтезованих алгоритмів у середовищі моделювання динамічних систем Matlab/Simulink	10 тиждень	

Студент _____
(підпис)

Коженков Д. Ю.
(прізвище та ініціали)

Керівник проекту _____
(підпис)

Руднев Є. С.
(прізвище та ініціали)

1 АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД

Роботи робастного керуванню можна умовно розділити на 3 частині: постановочні, математичні, обчислювальні. Вони різняться пріоритетами основних понять і завдань.

Роботи постановочного характеру в основному присвячені вивченню структури й вибору критичних параметрів у системах керування. Завдання синтезу регулятора, компенсатора, фільтра формулюються як оптимізаційні стосовно деяких функціоналів (звичайно це норма в просторі Харді H^∞). Потім вони зводяться до вирішених або ще невирішених проблемам теорії функцій. При цьому основна увага приділяється питанням реалізованості (наприклад, правильності передатної функції регулятора), вибору вихідних параметрів (у функціоналі якості, у мінімізованій послідовності) і інтерпретації результату. Саме такими були більшість робіт з дослідження грубості (робастності) систем зі зворотним зв'язком, особливо основні статті Дж. Зеймса [1, 2].

Рішенню математичних завдань мінімізації норм у функціональних просторах присвячена більша частина статей по H^∞ -оптимізації. Виявилось, що в рамках теорії функцій цей напрямок активний розвивається з початку ХХ століття до наших днів [3]. До його джерелами відносяться поліноми Чебишева й метод моментів Маркова. Теорія, розвинена на початку ХХ століття Піком, Шуром, Неванлинной, Каратеодорі, Фейером, одержала розвиток наприкінці 60-х років у статтях Адамяна, Арова, Крейна [4-6] і Сарасона [7] про операторів Ганкеля й найкращих апроксимаціях аналітичними функціями.

Рішення нових завдань у теорії H^2 й H^∞ -оптимального керування в цей час звичайне пов'язане з новими результатами в цій області.

Обчислювальні питання теорії включають розробку зручних формул, алгоритмів і програм, що з'єднують параметри з постановки завдання з остаточним результатом. Сюди можна віднести способи параметризації передатних функцій [8-16], алгоритми факторизації й J -факторизації поліноміальних матриць; рішення рівнянь Лур'є-Рікаті; ітеративні методи розрахунку оптимальних

регуляторів; параметричний опис класу всіх субоптимальних регуляторів із заданим рівнем функціонала.

Теорія автоматичного керування розвивається як у напрямку більш повного й глибокого аналізу функціонування й ефективності автоматичних систем і пристроїв при обліку реальних режимів роботи й діючих збурювань, так і в напрямку розробки методів синтезу оптимальних систем керування. Ці загальні напрямки теорії систем керування одержали особливий розвиток з появою швидкодіючих електронних обчислювальних машин, що дозволяють реалізувати складні обчислювальні алгоритми аналізу й синтезу систем керування.

Розвиток теорії автоматичного керування з кінця 50-х років значною мірою пов'язані з роботами Р. Калмана й Р. Бьюсі [17] по оптимальній лінійній фільтрації, а також А.М. Лєтова [18] і Р. Калмана по синтезу лінійних динамічних систем, оптимальних за квадратичним критерієм якості. Дані роботи сформували теоретичні основи для широкого застосування теорії в різних галузях науки й техніки й дозволили розв'язати принципово нові теоретичні й прикладні завдання.

У той же час, практика застосування теорії оптимальних систем при рішенні конкретних технічних завдань показала, що оптимальні системи, синтезовані за квадратичним критерієм якості, є чутливими до параметрів моделі реального об'єкта й характеристикам вхідних впливів, тобто є не грубими, і іноді втрачають не тільки оптимальність, але й працездатність у тих випадках, коли апріорна інформація про об'єкт і зовнішньому середовищу відома не точно, а лише з деякою вірогідністю, що задається інтервалами приналежності (класами невизначеності).

Це привело до того, що на початку 80-х років стали виникати постановки оптимальних завдань керування, які змогли б уникнути зазначених вище недоліків.

Сучасний період розвитку теорії керування характеризується постановкою й рішенням завдань, що враховують неточність наших знань про об'єкти керування й діючих на них зовнішніх збурювань. Завдання синтезу регулятора й

оцінювання стану з урахуванням невизначеності в моделі об'єкта й характеристиках вхідних впливів є одними із центральних у сучасній теорії керування. Їхня важливість обумовлена насамперед тим, що практично в будь-якому інженернім завданні конструювання системи керування є присутнім невизначеність (або помилка) у моделі об'єкта (математична модель об'єкта, отримана на основі теорії або в результаті ідентифікації, відрізняється від реальної технічної системи) і в знанні класу вхідних збурювань.

Основна й принципово нова ідея по синтезу робастного керування полягала в тому, щоб єдиним регулятором забезпечити стійкість замкненої системи не тільки для номінального (без обліку помилок моделі) об'єкта, але й для будь-якого об'єкта, що належить безлічі «обурених» об'єктів, обумовлених класом невизначеності.

Початком побудови більш строгої класичної теорії робастного керування, розповсюдженої на багатомірні системи, послужила стаття Зеймса [2], у якій був запропонований новий критерій оптимальності на основі H^∞ -норми багатомірної передатної функції замкненої системи. Використання H^∞ -норми як критерій оптимальності при синтезі багатомірних систем засноване на тому факті, що H^∞ -норма може служити заходом посилення системи. H^∞ -норма передатної функції є енергія виходу системи при подачі на вхід сигналу з одиначною енергією. Якщо виходом є помилка, а входом збурювання, то мінімізуючи H^∞ -норму передатної функції, ми мінімізуємо енергію помилки для найгіршого випадку вхідного збурювання. У скалярному випадку норма такої функції кінцева й дорівнює максимальному значенню амплітудно-частотної характеристики.

Таким же важливим першоджерелом для сьогоденішнього рівня розуміння проблеми є стаття Дойла й Стейна [19], яка поклала початок проблемі грубого або робастного керування для моделі, заданої в умовах невизначеності.

На початку 80-х років з'явилися нові постановки завдань синтезу систем керування, що зводяться до завдання H^∞ -оптимізації [2, 19] і враховуючі неви-

значеності в системі, інформація про яких мінімальна, одержали свої перші рішення до середини 80-х років на базі відразу декількох підходів [20-22].

Однак ці роботи мали скоріше теоретичне значення, оскільки процедури синтезу регуляторів були досить трудомісткими й громіздкими. Часом процедури синтезу приводили до курйозних результатів. Так, для системи другого порядку оптимальний H^∞ -регулятор мав десятий порядок [23]. Ці підходи повинні бути освітлені, тому що зв'язують сучасні проблеми математики з фізичними принципами побудови робастних регуляторів.

Багато робіт, опубліковані після 1984 року, розвивали так званий «підхід 1984», запропонований Дж. Дойлом [24], у якому на основі теорії ганкелевської апроксимації Гловера [25] дана процедура в просторі станів рішення проблеми H^∞ -оптимізації для випадку скінченновимірних лінійних систем.

В 1989 році на основі ряду ключових результатів у фундаментальній роботі [26] була сформульована нова концепція підходу до рішення завдання H^∞ -оптимізації, що одержала назву «2-Рікаті підходу». Суть підходу полягала в тому, що оптимальне завдання замінялося субоптимальною. Метод «2-Рікаті підходу» поєднує в собі класичну теорію автоматичного керування й метод простору станів, а саме: постановка завдання проводиться в частотній області, а її рішення здійснюється з використанням методу простору станів. Крім того, даний підхід дозволяє розроблювачам у процесі проектування задавати необхідні характеристики якості й робастної стійкості замкненої системи.

У рамках цього підходу процедура синтезу H^∞ -субоптимального керування була схожа на процедуру синтезу H^2 -оптимального керування. Застосовуючи цей підхід, удалося сформулювати принцип поділу в H^∞ -теорії керування, аналогічний добре відомому принципу поділу в LQG -теорії. Було показано, що за певних умов H^2 -теорія керування є граничним випадком H^∞ -теорії. Була суттєво спрощена процедура знаходження субоптимальних регуляторів [27]. Виявлене, що ступінь регулятора для об'єкта порядку n не перевершує n [28].

У рамках «2-Рікаті підходу» шуканий оптимальний регулятор у формі спостерігача визначається на основі рішення двох багатомірних рівнянь Лур'є-Рікаті для фільтрації (відновлення стану) і оптимального керування в змісті мінімуму H^∞ -норми замкненої системи. Регулятори, синтезовані з використанням цього критерію оптимальності, забезпечують стійкість замкненої системи й мінімальну чутливість до збурювань.

У цей час процедури синтезу H^∞ -регуляторів у рамках «2-Рікаті підходу» прийняті в якості стандарту. Після створення H^∞ -теорії для стаціонарних безперервних систем ця теорія була поширена й на інші класи систем. Так, у роботі [29] описане рішення завдання H^∞ -оптимізації для лінійних дискретних систем, а в статті [30] сформульоване й вирішене завдання H^∞ -оптимізації для нестационарних систем. Однак практичне застосування нестационарної теорії утруднене відсутністю ефективних алгоритмів рішення нестационарних рівнянь Рікаті.

Явні успіхи лінійної H^∞ -теорії керування привернули увагу фахівців з нелінійної теорії керування. У рамках нелінійної теорії з'явилися постановки завдань, аналогічні завданням у лінійній теорії. Отримані й числові алгоритми їх рішень [31,32]. Однак, як показали результати практичного застосування нелінійної H^∞ -теорії [33], вона являє собою поки теоретичний інтерес.

Викладу різних підходів по синтезу систем керування для систем з різними видами вистави невизначеності (параметричними, непараметричними, структурованими й неструктурованими) присвячені збірники статей [34-36]. Існують опубліковані огляди [37-40] і монографії [41] по H^∞ -теорії й у вітчизняній літературі.

Поява нових просто алгоритмізованих процедур знаходження регуляторів викликало великий інтерес до цієї проблематики в середовищі інженерів-розроблювачів систем керування. Були створені пакети прикладних програм для розроблювачів робастних систем керування. Найбільш популярним пакетом програм вважається *Robust Control Toolbox* для пакета *Matlab* [42].

2 ОСНОВНІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ Й ДЕЯКІ СПЕЦИФІЧНІ ПРИЙНЯТТЯ, ВИКОРИСТОВУВАНІ В H^∞ -ТЕОРІЇ

2.1 Опис «вхід-вихід»

В описі «вхід-вихід» об'єктів регулювання з матричною передатною функцією (МПФ) $\mathbf{G}(s) \in \mathbb{R}L^\infty$ лінійної багатомірної системи автоматичного регулювання (ЛБСАР) (рис. 2.1) зв'язок $\mathbf{J}(s)$ (перетворення Лапласа вхідного векторного сигналу $\mathbf{i}(t)$ (input – вхід)) і $\mathbf{O}(s)$ (перетворення Лапласа вихідного векторного сигналу $\mathbf{o}(t)$ (output – вихід)) представляється матричним вираженням:

женням:

$$\mathbf{O}(s) = \mathbf{G}(s) * \mathbf{J}(s), \quad (2.1)$$

$\begin{matrix} ((q+r) \times 1) & ((q+r) \times (l+m)) & ((l+m) \times 1) \end{matrix}$

що використовують звичайні правила множення матриць («рядок на стовець»).

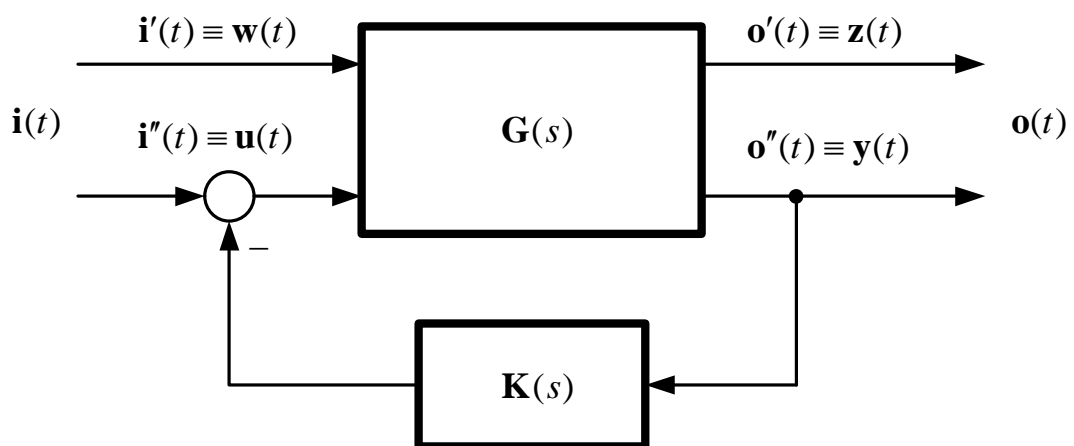


Рисунок 2.1 – Лінійна багатомірна система автоматичного регулювання (ЛБСАР)

На рис. 2.2 (без штрихпунктиру), що ілюструє погодженість до цієї операції матриць її компонент, розмірність останніх умовно представлена геометрично довжинами сторін прямокутників, що зображують на рис. 2.2 матриці.

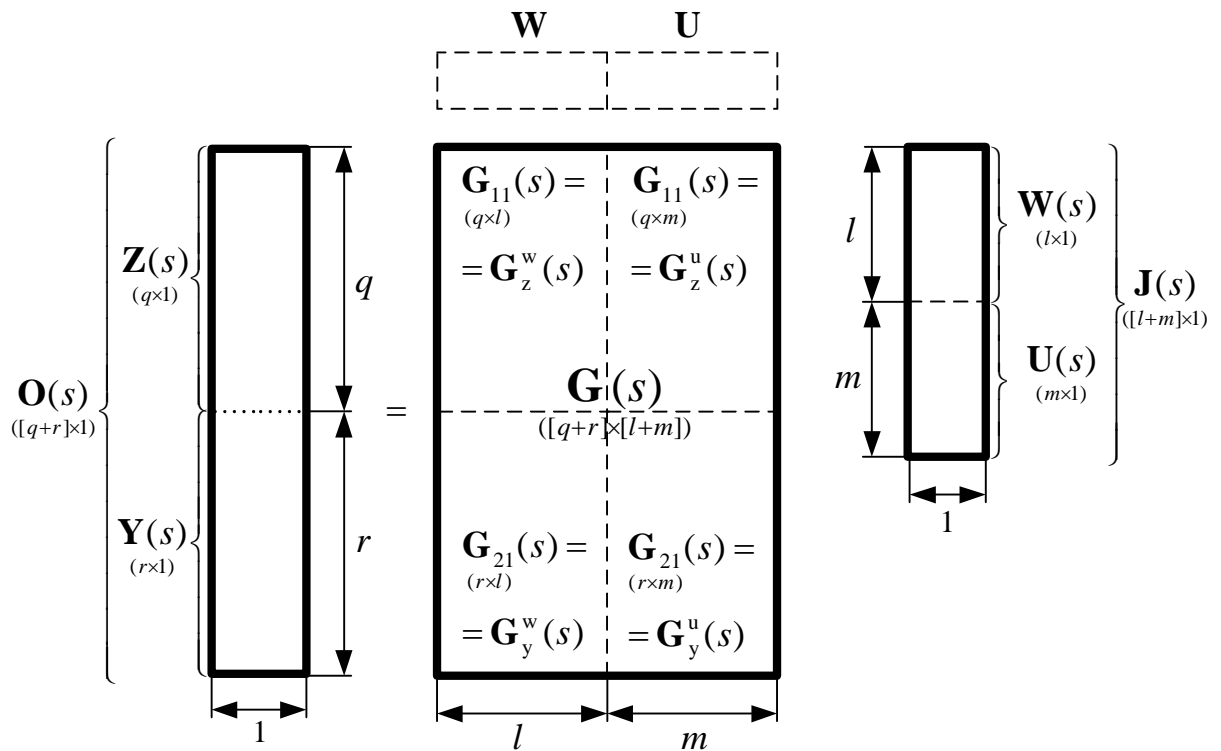


Рисунок 2.2 – Блокова структура МПФ

Нехай у векторах $\mathbf{i}(t)$ і $\mathbf{o}(t)$ виділяються частини, наприклад,

$$\mathbf{i}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{i}'(t) \equiv \mathbf{w}(t) \\ \dots\dots\dots \\ \mathbf{i}''(t) \equiv \mathbf{u}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{o}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{o}'(t) \equiv \mathbf{z}(t) \\ \dots\dots\dots \\ \mathbf{o}''(t) \equiv \mathbf{y}(t) \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Тут $\mathbf{w}(t)$ – вектор збурювальних впливів;
($l \times 1$)

$\mathbf{u}(t)$ – вектор керуючих впливів;
($m \times 1$)

$\mathbf{z}(t)$ – частина вектора виходу, використовувана для контролю якості
($q \times 1$)

ЛБСАР (однієї з компонентів цього вектора може бути, наприклад помилка регулювання);

$\mathbf{y}(t)$ – частина вектора виходу, використовувана для поліпшення якості
($r \times 1$)

роботи ЛБСАР (частина, по якій замикається через регулятор зворотний зв'язок).

Якщо тепер протранспонувати $\mathbf{i}(t)$ і помістити його над матрицею $\mathbf{G}(s)$ (штрихпунктир на рис. 2.2), то остання розіб'ється на блоки (пунктир на рис. 2.2), кожний з яких характеризує явний зв'язок між частинами вектора, що лежать проти даного блоку, описувана тим же, що й представлений формулою (2.1), типом матричного вираження, наприклад

$$\mathbf{Z}_w(s) = \mathbf{G}_z^w(s)\mathbf{W}(s),$$

де $\mathbf{Z}_w(s)$ – образ реакції ЛБСАР по каналу $\mathbf{z}(t)$ тільки на сигнал $\mathbf{w}(t)$.

Аналогічно

$$\mathbf{Z}_u(s) = \mathbf{G}_z^u(s)\mathbf{U}(s)$$

де $\mathbf{Z}_u(s)$ – образ реакції ЛБСАР по каналу $\mathbf{z}(t)$ тільки на сигнал $\mathbf{u}(t)$.

Реакція по цьому каналу на весь вхідний сигнал $\mathbf{i}(t)$ у силу лінійності БСАР є

$$\mathbf{Z}(s) = \mathbf{Z}_w(s) + \mathbf{Z}_u(s) = \mathbf{G}_z^w(s)\mathbf{W}(s) + \mathbf{G}_z^u(s)\mathbf{U}(s),$$

або у векторному виді

$$\mathbf{Z}(s) = \left[\mathbf{G}_z^w(s) : \mathbf{G}_z^u(s) \right] \begin{bmatrix} \mathbf{W}(s) \\ \dots \\ \mathbf{U}(s) \end{bmatrix} \text{ і т.д.,}$$

що відповідає звичайним правилам множення матриць.

2.2 Опис у просторі станів

У просторі станів співвідношення (2.1) представляється вираженнями

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{i}(t) ; \\ \mathbf{o}(t) &= \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{i}(t) . \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Цей факт прийнято позначати

$$\mathbf{G}(s) \stackrel{s}{=} [\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}], \quad (2.4)$$

маючи у виді, що

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}. \quad (2.5)$$

У H^∞ -теорії керування дуже поширена інша форма зображення (2.3), до якої приходимо, увівши узагальнений вихідний $\mathbf{o}_0(t)$ і узагальнений вхідний $\mathbf{i}_0(t)$ вектори

$$\mathbf{o}_0(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dots \\ \mathbf{o}(t) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{i}_0(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dots \\ \mathbf{i}(t) \end{bmatrix}.$$

Тоді (2.3) може бути записане у вигляді вираження, аналогічного за структурою (2.1), але в часовій області:

$$\mathbf{o}_0(t) = \underset{((n+q+r) \times 1)}{\mathbf{G}_t} \times \underset{((n+l+m) \times 1)}{\mathbf{i}_0(t)}, \quad (2.6)$$

де \mathbf{G}_t – блокова матриця, складена з матриць **ABCD**-реалізації (у просторі стану) системи (2.1) (див. рис. 2.3, на якому ілюструється погодженість до операції (2.6) її членів). Таким чином, матриця \mathbf{G}_t представляє в просторі стану матрицю $\mathbf{G}(s)$ інакше, ніж $[\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}]$, і позначають цей факт так:

$$\mathbf{G}(s) \stackrel{s}{=} \mathbf{G}_t = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right]. \quad (2.7)$$

Верхні два блоки матриці \mathbf{G}_t , явно зв'язуючи швидкість $\dot{\mathbf{x}}$ із \mathbf{x} і \mathbf{i} , утворюють співвідношення, що описує неявну залежність самих цих координат – залежність у вигляді диференціального рівняння. Цим вони принципово відрізняються від інших блоків матриці \mathbf{G}_t й від блоків матриці $\mathbf{G}(s)$, які утворюють вираження, що описує явний зв'язок координат.

Відзначеної особливості таких блоків є те, що останні відділені в матриці \mathbf{G}_t суцільними, а не пунктирними лініями. Якщо вектори $\mathbf{i}(t)$ й $\mathbf{o}(t)$ розбиті ще на частині (див. (2.2) на рис. 2.2), то співвідношення (2.3) можна представити у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{z}(t) &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{11}\mathbf{w}(t) + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}(t) + \mathbf{D}_{22}\mathbf{u}(t), \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

і відповідно до правила (див. рис. 2.2) блоки **B, C** розбиваються на два, а блок **D** - на чотири звичайні блоки, таким чином,

$$\mathbf{G}(s) \stackrel{s}{=} \mathbf{G}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix}.$$

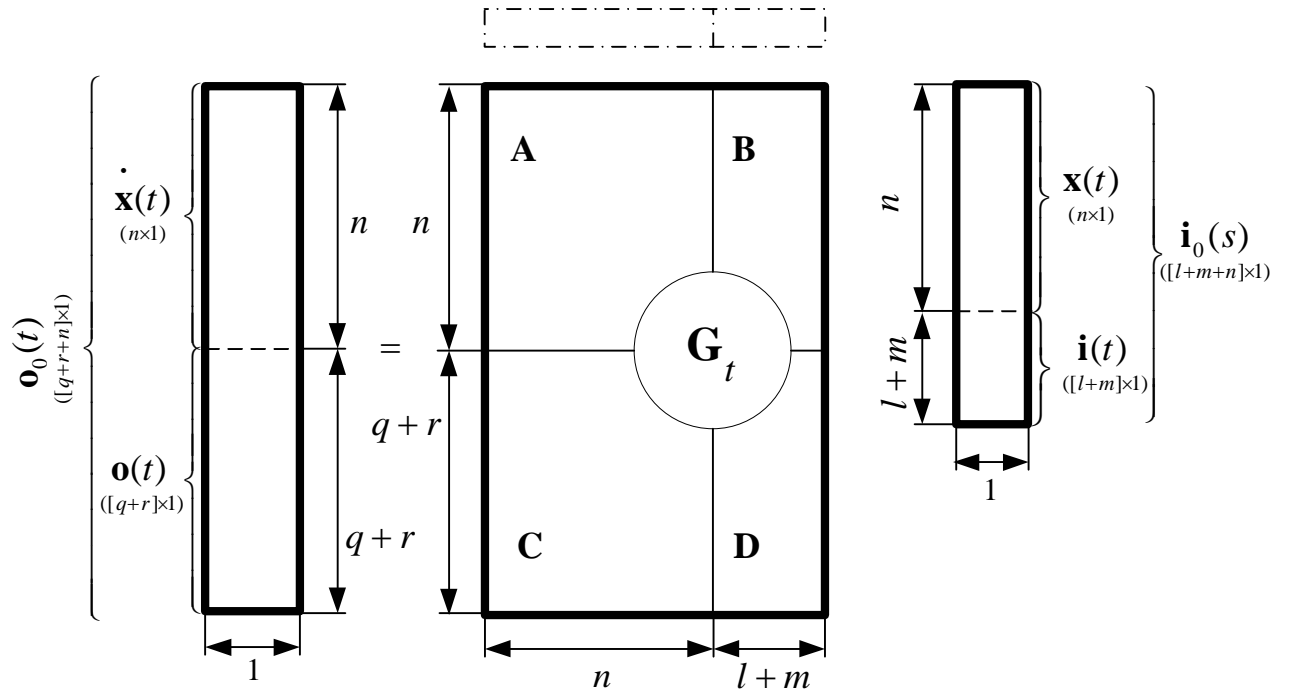


Рисунок 2.3 – Блокова структура \mathbf{G}_t

У такому виді (тільки без поділяючих пунктирних ліній) матриця \mathbf{G}_t й використовується в H^∞ -теорії. При цьому мається на увазі, що \mathbf{G}_t в зазначеному виді представляє $\mathbf{G}(s)$ у формі рис. 2.2, а саме:

$$\mathbf{G}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_z^w(s) & \mathbf{G}_z^u(s) \\ \mathbf{G}_y^w(s) & \mathbf{G}_y^u(s) \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

причому праву матрицю слід розуміти в змісті

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{A} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{A} & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{22} \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

тому що **ABCD**-реалізації будь-якої підсистеми, що включає трійку конкретних **B****C****D** з **B**_{*i*}, *i* = 1, 2; **C**_{*j*}, *j* = 1, 2; **D**_{*kl*}, *k, l* = 1, 2, у якості четвертої матриці відповідає завжди однакова (та сама) матриця **A**.

Таким чином, форма (2.9) зображення блоків **G**(*s*) блоками **A**, **B**, **C**, **D**, означає насправді форму (2.10), тобто наприклад,

$$\mathbf{G}_y^w(s) = \mathbf{C}_2(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}_1 + \mathbf{D}_{21} \text{ і т.д.}$$

2.3 Лінійні дробові перетворення (ЛДП) (linear fractional transformation (LFT))

За допомогою правил структурних перетворень неважко одержати вираження, що зв'язує МПФ замкненої системи (рис. 2.1) від **w**(*t*) до **z**(*t*) із МПФ вхідних у цю структуру компонентів:

$$\mathbf{\Phi}_z^w(s) = \mathbf{G}_{11}(s) + \mathbf{G}_{12}(s) \left[\mathbf{I} + \mathbf{K}(s)\mathbf{G}_{22}(s) \right]^{-1} \mathbf{K}(s)\mathbf{G}_{21}(s).$$

(*q*×*l*) (*q*×*l*) (*q*×*m*) [(*m*×*m*) (*m*×*r*) (*r*×*m*)]⁻¹ [(*m*×*r*) (*r*×*l*)]

Вираження, близьке йому, позначається **F**_{*L*}(**G**, **K**) й називається в *H*[∞]-теорії нижнім ЛДП (НЛДП) (lower LFT (LLFT)):

$$\mathbf{F}_L(\mathbf{G}, \mathbf{K}) = \mathbf{G}_{11} + \mathbf{G}_{12} \mathbf{K} \left[\mathbf{I} + \mathbf{G}_{22} \mathbf{K} \right]^{-1} \mathbf{G}_{21}. \quad (2.11)$$

(*q*×*l*) (*q*×*l*) (*q*×*m*) (*m*×*r*) [(*r*×*r*) (*r*×*m*) (*m*×*r*)]⁻¹ (*r*×*l*)

До ЛДП відноситься ще й верхнє (ВЛДП) (upper LFT (ULFT)):

$$\mathbf{F}_U(\mathbf{G}, \mathbf{\Delta}) = \mathbf{G}_{22} + \mathbf{G}_{12} \mathbf{\Delta} \left[\mathbf{I} + \mathbf{G}_{11} \mathbf{\Delta} \right]^{-1} \mathbf{G}_{12}, \quad (2.12)$$

(*r*×*m*) (*r*×*m*) (*r*×*l*) (*l*×*q*) [(*q*×*q*) (*q*×*l*) (*l*×*q*)]⁻¹ (*q*×*m*)

близьке до $\mathbf{\Phi}_y^u(s)$ для системи (рис. 2.4):

$$\mathbf{\Phi}_y^u(s) = \mathbf{G}_{22} + \mathbf{G}_{21} \left[\mathbf{I} + \mathbf{\Delta} \mathbf{G}_{11} \right]^{-1} \mathbf{\Delta} \mathbf{G}_{12}.$$

(*r*×*m*) (*r*×*m*) (*r*×*l*) [(*l*×*l*) (*l*×*q*) (*q*×*l*)]⁻¹ (*l*×*q*) (*q*×*m*)

Якщо розмірності матриць **K**, **Δ** такі, що існує зворотні їм, то легко показати, що, дійсно, перетворення **F**_{*L*}(**G**, **K**) збігається з $\mathbf{\Phi}_z^w(s)$, а **F**_{*U*}(**G**, **Δ**) – $\mathbf{\Phi}_y^u(s)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_L(\mathbf{G}, \mathbf{K}) &= \mathbf{G}_{11} + \mathbf{G}_{12} \mathbf{K} (\mathbf{I} + \mathbf{G}_{22} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{G}_{21} = \\
&= \mathbf{G}_{11} + \mathbf{G}_{12} \mathbf{K} (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{K} + \mathbf{G}_{22} \mathbf{K})^{-1} \mathbf{G}_{21} = \\
&= \mathbf{G}_{11} + \mathbf{G}_{12} \mathbf{K} \left([\mathbf{K}^{-1} + \mathbf{G}_{22}] \mathbf{K} \right)^{-1} \mathbf{G}_{21} = \\
&= \mathbf{G}_{11} + \mathbf{G}_{12} \mathbf{K} \mathbf{K}^{-1} (\mathbf{K}^{-1} + \mathbf{G}_{22})^{-1} \mathbf{G}_{21} = \\
&= \mathbf{G}_{11} + \mathbf{G}_{12} (\mathbf{K}^{-1} + \mathbf{G}_{22})^{-1} \mathbf{G}_{21} = \\
&= \mathbf{G}_{11} + \mathbf{G}_{12} (\mathbf{K}^{-1} + \mathbf{G}_{22})^{-1} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{G}_{21} = \\
&= \mathbf{G}_{11} + \mathbf{G}_{12} \left(\mathbf{K} [\mathbf{K}^{-1} + \mathbf{G}_{22}] \right)^{-1} \mathbf{K} \mathbf{G}_{21} = \\
&= \mathbf{G}_{11} + \mathbf{G}_{12} (\mathbf{I} + \mathbf{K} \mathbf{G}_{22})^{-1} \mathbf{K} \mathbf{G}_{21} = \Phi_z^w.
\end{aligned}$$

Можна й по іншому, наприклад, для \mathbf{F}_U :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_U(\mathbf{G}, \Delta) &= \mathbf{G}_{22} + \mathbf{G}_{21} \Delta (\mathbf{I} + \mathbf{G}_{11} \Delta)^{-1} \mathbf{G}_{12} = \\
&= \mathbf{G}_{22} + \mathbf{G}_{21} \Delta (\Delta^{-1} \Delta + \Delta \mathbf{G}_{11} \Delta)^{-1} \mathbf{G}_{12} = \\
&= \mathbf{G}_{22} + \mathbf{G}_{21} \Delta (\Delta^{-1} [\mathbf{I} + \Delta \mathbf{G}_{11}] \Delta)^{-1} \mathbf{G}_{12} = \\
&= \mathbf{G}_{22} + \mathbf{G}_{21} \Delta \Delta^{-1} [\mathbf{I} + \Delta \mathbf{G}_{11}]^{-1} \Delta \mathbf{G}_{12} = \\
&= \mathbf{G}_{22} + \mathbf{G}_{21} [\mathbf{I} + \Delta \mathbf{G}_{11}]^{-1} \Delta \mathbf{G}_{12} = \Phi_y^u.
\end{aligned}$$

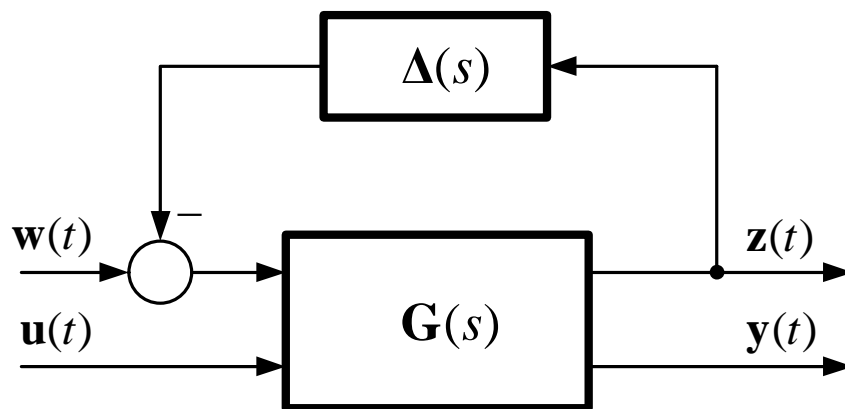


Рисунок 2.4 – БСАР, описувана ВЛДП

Тому (див.(2.1)) ЛДП увійдуть у співвідношення, що зв'язують відповідні сигнали в ЛБСАР (рис. 2.1, рис. 2.4) лінійно, і, таким чином, якщо ЛДП повинні будуть визначатися в результаті рішення задачі оптимізації, то остання виявиться задачею лінійної оптимізації.

2.4 Узагальнений об'єкт $P(s)$, відповідний до об'єкта $G(s)$

Вплив середовища й неадекватності відповідних математичних моделей об'єкту й впливам приводить до того, що реальна робота об'єкта проходить в умовах невизначеності, що проявляється через невизначеність зовнішніх впливів (що в H^∞ -теорії враховане специфікою фізичного змісту оцінок динамічних властивостей системи), і невизначеність об'єкта, яка враховується тут у такий спосіб.

Уважається, що представлятися вона може структурованої (у вигляді збурювання конкретних параметрів (наприклад, постійних часу, коефіцієнтів передачі) у заданій структурі об'єкта) і неструктурованої, наприклад, у вигляді збурювань усієї МПФ (така назва пояснюється тим, що збурювання, представлене у вигляді добавки до всієї МПФ, не задає характеру збурювань конкретним параметрам вихідної структури).

Розглядається три способи завдання неструктурованого збурювання.

1. У вигляді адитивної лінійної добавки, що обурює (див. рис. 2.5)

$$\mathbf{G}_{\Delta a}(s) = \mathbf{G}(s) + \Delta(s), \quad \Delta(s) \in \mathbb{R}L^\infty. \quad (2.13)$$

Тут член $\Delta(s)$, що описує самі збурювання, такий, що $\|\Delta(s)\|_{\mathbb{R}L^\infty} = 1$. Приналежність його $\mathbb{R}L^\infty$ необхідна для того, щоб ця приналежність $\mathbf{G}(s)$ не була загублена функцією $\mathbf{G}_{\Delta a}(s)$.

2. У вигляді мультиплікативної добавки

$$\mathbf{G}_{\Delta M}(s) = [1 + \Delta(s)]\mathbf{G}(s), \quad \Delta(s) \in \mathbb{R}L^\infty. \quad (2.14)$$

(див. рис. 2.6).

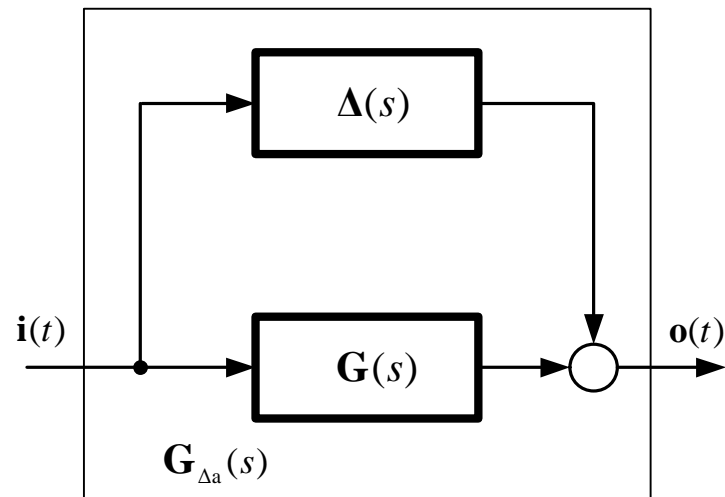


Рисунок 2.5 – Структурна схема адитивної невизначеності об'єкта

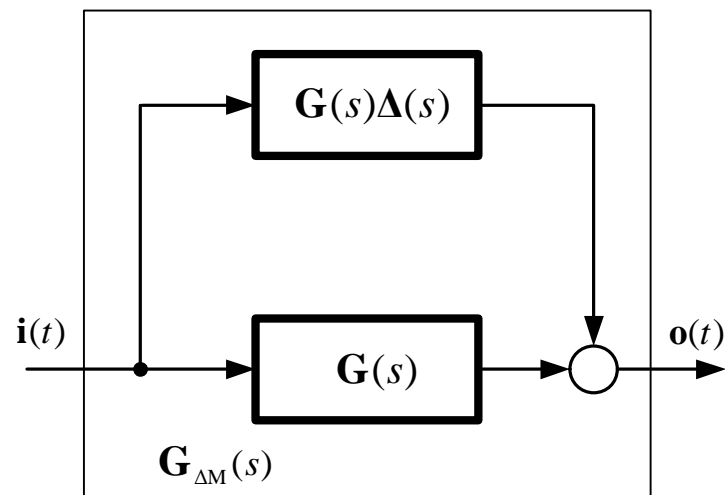


Рисунок 2.6 – Структурна схема мультиплікативної невизначеності об'єкта

3. У вигляді адитивних взаємно простих добавок

$$\mathbf{G}_{\Delta\text{ВП}}(s) = \left[\tilde{\mathbf{N}}(s) + \Delta\tilde{\mathbf{N}}(s) \right]^{-1} * \left[\tilde{\mathbf{M}}(s) + \Delta\tilde{\mathbf{M}}(s) \right],$$

$\Delta\tilde{\mathbf{M}}(s), \Delta\tilde{\mathbf{N}}(s) \in \mathbb{R}L^\infty$ (див. рис. 2.7). Додавки повинні належати \mathbb{RH}^∞ для того, щоб ця властивість не втратили компоненти $\mathbf{G}_{\Delta\text{ВП}}(s)$.

Більш гнучким облік невизначеності можна зробити, якщо замість $\Delta(s)$ використовувати $\mathbf{Q}(s) * \Delta(s)$, де $\mathbf{Q}(s) \in \mathbb{R}L^\infty$ (для випадків 1,2) – довільна функ-

ція, за допомогою якої можна враховувати інформацію (якщо вона є) про ступінь впливу шуму на об'єкт у різних діапазонах частот.

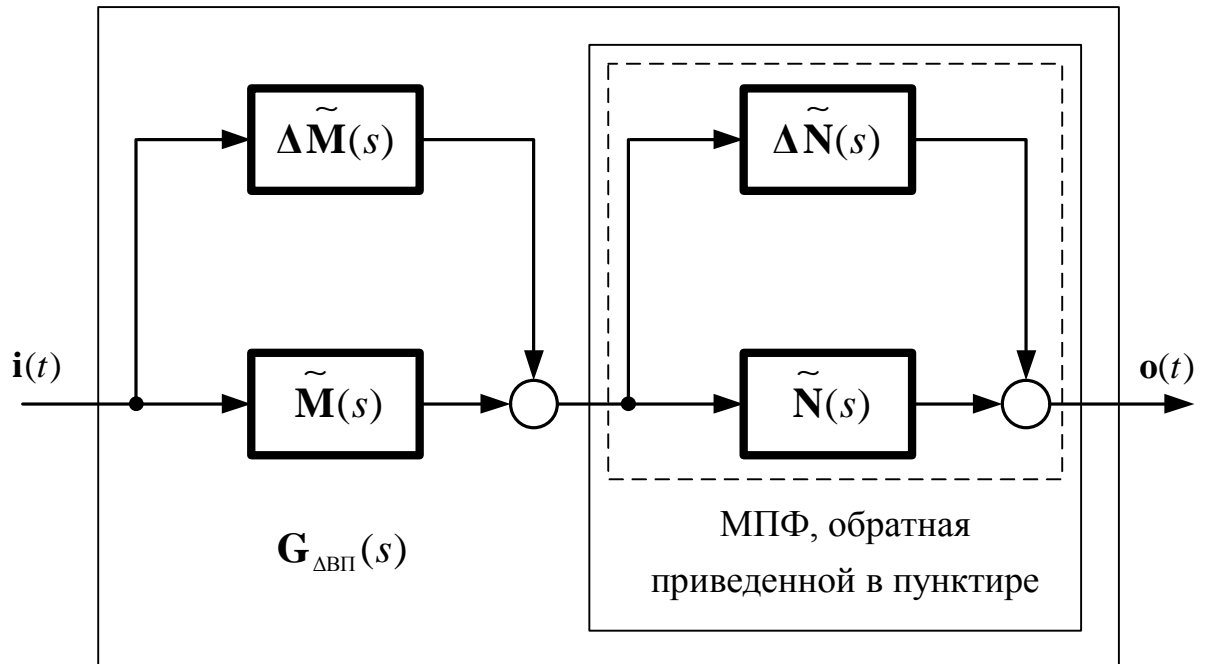


Рисунок 2.7 – Невизначеність, задана через компоненти взаємо-зворотної факторизації МПФ об'єкта

Усі три розглянуті способи можуть бути представлені математично однозначно за допомогою ВЛДП (див. рис. 2.4), у якому $\mathbf{G}(s)$ замінюється на $\mathbf{P}(s)$,

де $\mathbf{P}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \hline \mathbf{P}_{21} & \mathbf{P}_{22} \end{array} \right]$ – МПФ узагальненого об'єкта, що має свій вид для кожного

способу завдання збурювання. А саме:

- для $\mathbf{G}_{\Delta a} - \mathbf{P}(s) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{G} \end{array} \right];$
- для $\mathbf{G}_{\Delta M} - \mathbf{P}(s) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & \mathbf{G} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{G} \end{array} \right];$
- для $\mathbf{G}_{\Delta VP} - \mathbf{P}(s) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline \tilde{N}^{-1} & \mathbf{G} \\ \hline \tilde{N}^{-1} & \mathbf{G} \end{array} \right].$

Переконаємося в справедливості цього твердження на прикладі $\mathbf{G}_{\Delta M}$. Дійсно, оскільки для $\mathbf{G}_{\Delta M}$ маємо $\mathbf{P}_{11} = 0, \mathbf{P}_{12} = \mathbf{G}, \mathbf{P}_{21} = \mathbf{I}, \mathbf{P}_{22} = \mathbf{G}$, згідно (2.12)

$$\mathbf{F}_U(\mathbf{P}, \Delta) = \mathbf{G} + \mathbf{I}\Delta(1-0)^{-1}\mathbf{G} = (\mathbf{I} + \Delta)\mathbf{G} = \mathbf{G}_{\Delta M}, \quad (2.15)$$

(див. (2.14)). Умовна схема (рис. 2.8) випливає з (2.15), у цьому випадку являє собою схему (рис. 2.6) з регулятором.

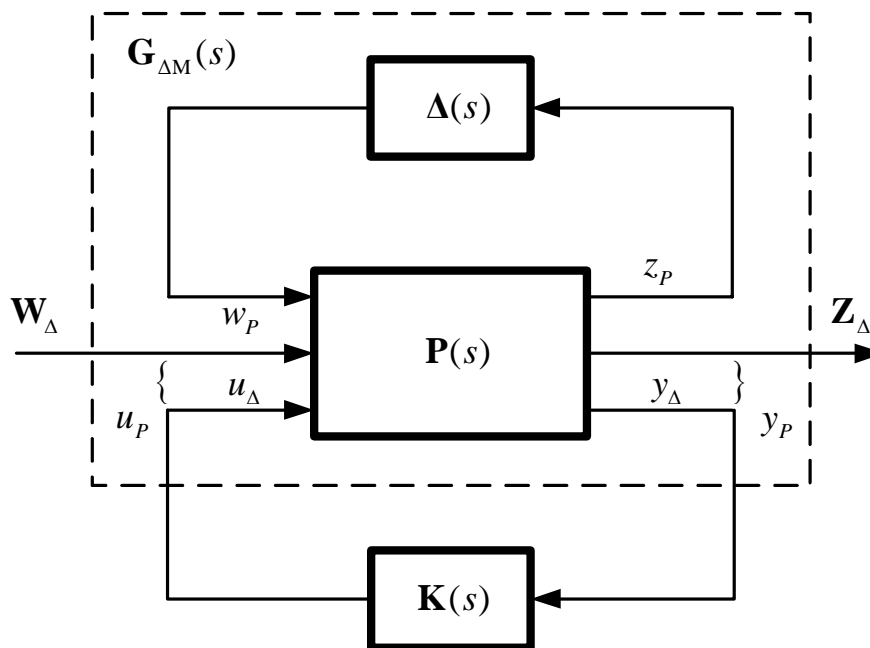


Рисунок 2.8 – БСАР з мультипликативно заданої невизначеністю об'єкта

Передатна функція $\Phi_{z_{\Delta}}^{w_{\Delta}}(s)$ замкненої через регулятор системи (див. рис. 2.8), об'єкт якої $\mathbf{G}_{\Delta M}(s)$ підданий неструктурованим мультипликативним впливам, рівна $\mathbf{F}_U(\mathbf{G}_{\Delta M}, \mathbf{K})$ (див. (2.11)). Для того щоб скористатися формулою (2.11), потрібно мати у своєму розпорядженні блоки $\mathbf{G}_{\Delta M_{ij}}(s)$, $i, j = 1, 2$ МПФ $\mathbf{G}_{\Delta i}(s)$, які неважко отримати з (2.14):

$$\mathbf{G}_{\Delta M} = \mathbf{G} + \Delta\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix}.$$

Звідси, наприклад,

$$\mathbf{G}_{\Delta M_{21}} = \mathbf{G}_{21} + \Delta_{21}\mathbf{G}_{11} + \Delta_{22}\mathbf{G}_{21} \text{ і т.д.}$$

2.5 Фізичний зміст норм

Для $u(t): R \rightarrow R$,

$$\|u\|_2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Нехай $u(t)$ – струм через резистор опором 1 Ом, тоді миттєва потужність, виділювана на цьому опорі, рівно $u^2(t)dt$, а загальна енергія – інтеграл від цієї величини (тобто $\|u\|_2^2$). Отже, квадрат 2-норми сигналу являє собою його енергію.

Нескінченність-норма сигналу – точна верхня грань його абсолютної величини:

$$\|u\|^\infty = \sup_t |u(t)|,$$

тобто, наприклад, для сигналу $u(t) = 1 - e^{-t}$ (див. рис. 2.9), $\|u\|^\infty = 1$.

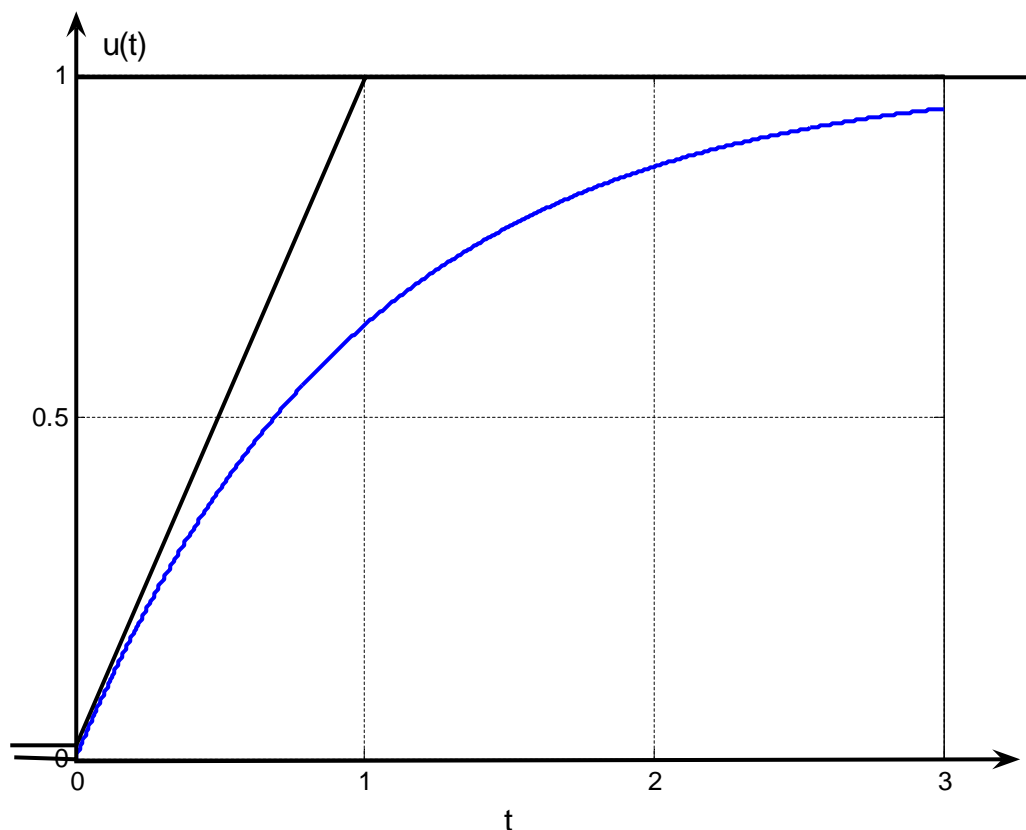


Рисунок 2.9 – Графік залежності $u(t) = 1 - e^{-t}$

Для лінійної системи з передатною функцією $\Phi(s) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\|\Phi\|_2 = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^*(j\omega)\Phi(j\omega)d\omega \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\Phi\|_{\infty} = \sup_{\omega} \left[\Phi^*(j\omega)\Phi(j\omega) \right]^{\frac{1}{2}} = \sup_{\omega} |\Phi(j\omega)|.$$

Відповідно до теореми Парсеваля [43] два-норми для часової та частотної областей рівні, тому

$$\|\Phi\|_2 = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 d\omega \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |K(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}},$$

тобто $\|\Phi\|_2^2$ є енергія реакції цієї системи на дельта-функцію при нульових початкових умовах. Для SISO-системи H^{∞} -норму $\Phi(s)$ можна інтерпретувати як відстань на комплексній площині від початку координат до найбільш видаленої точки кривій її АФЧХ, або, що те ж саме, як максимальний пік її АЧХ.

Тепер розглянемо вхідний сигнал $u(t)$ системи $\Phi(s)$, що належить сімейству таких, що їх $\|u\|_2 \leq 1$. Тоді

$$\begin{aligned} \|y(t)\|_2^2 &= \|\mathbf{Y}(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(j\omega)|^2 |U(j\omega)|^2 d\omega \leq \\ &\leq \sup_{\omega} |\Phi(j\omega)|^2 \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |U(j\omega)|^2 d\omega \right] = \|\Phi\|_{\infty}^2 \|U(j\omega)\|_2^2 \|\Phi\|_{\infty}^2 \|u(t)\|_2^2, \end{aligned} \quad (2.16)$$

тобто нескінченність-норма ПФ системи є точна верхня грань кореня квадратного з коефіцієнтів підсилення цієї системи по потужності для сімейства сигналів $\|u\|_2 = 1$, що мають різну форму частотного спектра. Крім того, оскільки

$$\|\Phi\|_{\infty} = \sup \left\{ \|y\|_2 = \|\Phi U\|_2 : u \in L_2[0, \infty), \|u\|_2 \leq 1 \right\}, \quad (2.17)$$

H^{∞} -норма $\Phi(s)$ є корінь квадратний з енергії виходу при подачі на вхід сигналу з одиничною енергією, тобто з найбільшою енергією із зазначеного сімейства сигналів [44], і нескінченність-норма ПФ, як функції комплексної змінної,

відіграє роль норми оператора ($\|\Phi\|$), це справедливо й для МОМО-систем, але от із приводу властивості $\|\Phi\|$ бути оцінкою коефіцієнта підсилення по потужності можна лише сказати, що вона деякою її оцінкою залишається, однак конкретизувати цю оцінку (як у випадку SISO-систем) не можна, тому що одержати нерівність типу (4.16) не вдається, адже

$$\|y(t)\|^2 = \|\mathbf{Y}(s)\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} U^T(-j\omega) \Phi^T(-j\omega) \Phi(j\omega) U(j\omega) d\omega$$

2.6 Обчислення H^2 -норми

H^2 -норма передатної функції кінцева, тоді $\Phi'(s)$ строго правильна й не має особливостей на уявній осі. Для передатних функцій невисоких порядків H^2 -норму можна обчислити, користуючись її визначенням:

$$\begin{aligned} \|\Phi'\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi'^*(-j\omega) \Phi'(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \Phi'(-s) \Phi'(s) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint \Phi'(-s) \Phi'(s) ds \end{aligned}$$

Перейти від інтегрування по уявній осі до інтегрування по замкненому контуру можна в силу строгої правильності $\Phi'(s)$ [45]. Отже, можна визначити H^2 -норму $\Phi'(s)$ як корінь квадратний із суми відрахувань функції $\Phi'(-s)\Phi'(s)$ в її полюсах у лівій або в правій півплощині (у силу симетричності розташування полюсів підінтегрального вираження щодо уявної осі площини s).

Але частіше для визначення H^2 -норми зручніше використовувати описом системи $\Phi'(s)$ в просторі станів (матриця \mathbf{D} для неї дорівнює нулю, а $\mathbf{K}'_{ABC}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}, t > 0$).

Скориставшись визначенням H^2 -норми матричної передатної функції й рівністю Парсеваля, одержимо:

$$\begin{aligned}
\|\Phi'\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace}[\Phi'(-s)\Phi'(-s)] ds = \\
&= \int_0^{\infty} \text{trace}[\mathbf{K}'_{ABC}(t)\mathbf{K}'_{ABC}(t)] dt = \int_0^{\infty} \text{trace}[\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B}] dt = \\
&= \text{trace}\left[\mathbf{B}^T \int_0^{\infty} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{C}^T \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} dt \mathbf{B}\right] = \text{trace}[\mathbf{B}^T \mathbf{L}'_e \mathbf{B}],
\end{aligned} \tag{2.18}$$

де \mathbf{L}'_e – грам'ян спостережуваності, обумовлений у результаті рішення рівняння Ляпунова

$$\mathbf{A}^T \mathbf{L}'_e + \mathbf{L}'_e \mathbf{A} + \mathbf{C}^T \mathbf{C} = 0.$$

У силу дуальності понять спостережуваності й керованості можна застосувати аналогічну процедуру з використанням грам'яна керованості \mathbf{L}'_c : рішення рівняння Ляпунова

$$\mathbf{A}^T \mathbf{L}'_c + \mathbf{L}'_c \mathbf{A} + \mathbf{B}^T \mathbf{B} = 0,$$

$$\|\Phi'\|_2 = \left[\text{trace}(\mathbf{C} \mathbf{L}'_c \mathbf{C}^T) \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.19}$$

Видно, що H^2 -норму можна визначити за кінцеве число кроків, тому що рівняння Ляпунова – лінійне матричне рівняння, яке розв'язується (хоча й не завжди просто) аналітично.

2.7 Обчислення H^∞ -норми

Обчислити H^∞ -норму $\Phi'(s)$ набагато складніше, чим H^2 -норму. Якщо користуватися визначенням, то потрібно шукати частоту, що задовольняє рівнянню

$$\frac{d}{d\omega} |\Phi(j\omega)|^2 = 0$$

(або

$$\frac{d}{d\omega} \sup_{c>0} \lambda_{\max} \Phi'^T(c - j\omega) \Phi'(c + j\omega) = \frac{d}{d\omega} \sup_{c>0} \bar{\sigma}[\Phi'(c + j\omega)] = 0$$

для випадку матричної передатної функції). Це можна зробити, коли $\Phi'(s)$ має простий вигляд, а обчислення сингулярного числа багаточленної матриці – сама по собі дуже складне завдання. Тому застосування такого способу суттєво обмежене, і H^∞ -норму шукають із використанням зображення $\Phi'(s)$ в просторі стану.

Для строго правильної передатної функції

$$\Phi'(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \quad (\text{тому що } \mathbf{D} = 0) \quad (2.20)$$

Для матриці Гамільтона:

$$\mathbf{H} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{C}\mathbf{C}^T & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

порядку $2n \times 2n$, де n – порядок матриці \mathbf{A} , в [43] сформульована й доведена наступна теорема: $\|\Phi'\|^\infty < 1$, що коли відповідає матричній ПФ $\Phi'(s)$ матриця Гамільтона не має власних чисел на уявній осі. (Якщо розглядати $\Phi(s)$ (с) $\mathbf{D} \neq 0$, то матриця (2.21) має більш складний вид, і в цій теоремі з'явиться додаткова умова: $\|\mathbf{D}\| < 1$ [46].)

На основі цієї теореми будується алгоритм пошуку (методом проб) $\|\Phi'\|^\infty$ із заданою точністю за допомогою дослідження спектра матриці \mathbf{H} . Фактично із заданою точністю шукається не сама H^∞ -норма, а її верхня оцінка. Для цього масштабують Φ' , тобто вибирають позитивне число γ таке, щоб виконувалася умова $\|\gamma^{-1}\mathbf{G}\|^\infty < 1$, еквівалентне $\|\mathbf{G}\|^\infty < \gamma$. Масштабування $\Phi'(s)$ в просторі стану можна здійснити, обравши, наприклад, замість \mathbf{B} матрицю $\mathbf{B}\gamma^{-1}$, тоді відповідна матриця Гамільтона має вигляд

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}\mathbf{B}^T\gamma^{-2} \\ -\mathbf{C}^T\mathbf{C} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Для обраного γ шукаються власні числа \mathbf{H} , які перевіряються на близькість до уявної осі й відповідно до результатів, обране раніше γ змінюється в

більшу або меншу сторону. Обчислення проводяться доти, поки не досягнута необхідна точність.

З наведеної процедури видно, що H^∞ -норма вже не може бути обчислена за кінцеву кількість кроків (як H^2 -норма). Для оцінки $\|\mathbf{G}\|^\infty$ із заданою точністю необхідний ітераційний пошуковий процес.

3 МЕТОДИ СИНТЕЗУ РОБАСТНИХ РЕГУЛЯТОРІВ.

« ДВА-РІККАТІ ПІДХІД» ДО ПРОБЛЕМИ H^2 - Й H^∞ - ОПТИМІЗАЦІЇ

У цьому розділі паралельно розглядаються проблеми синтезу H^∞ - і H^2 - оптимальних регуляторів. Приводяться й порівнюються структура й формули для цих регуляторів.

3.1 Постановка проблеми

Синтезована система представлена структурною схемою, яка зображена на рис. 3.1, де \mathbf{K} й \mathbf{G} – передатні матриці регулятора й об'єкта керування відповідно; \mathbf{K} і \mathbf{G} – дрібно-раціональні й правильні,

$$\mathbf{u}_1(t) \equiv \mathbf{w}(t): \|\mathbf{w}(t)\|_2 \leq 1; \quad (3.1)$$

$$\mathbf{u}_2(t) = \mathbf{u}_3(t) = 0; \quad \mathbf{y}_1(t) \equiv \mathbf{z}(t); \quad \mathbf{y}_2(t) \equiv \mathbf{y}(t); \quad \boldsymbol{\varepsilon}(t) \equiv \mathbf{u}(t).$$

Передатна функція від збурювання $w(t)$ до контрольованої змінної $\mathbf{z}(t)$: $\Phi_z^w \equiv \mathbf{T}_{zw} = \mathbf{F}_L(\mathbf{G}, \mathbf{K})$. Отже, завданням H^∞ -оптимізації є вибір такого регулятора \mathbf{K} , який би мінімізував $\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty$, а H^2 -регулятор повинен забезпечувати мінімум $\|\mathbf{T}_{zw}\|_2$. Причому вибір оптимального регулятора \mathbf{K} здійснюється як в одному, так і в іншому випадку над множиною всіх регуляторів, що володіють властивістю робити замкнену систему \mathbf{T}_{zw} внутрішньо стійкої, тобто над множиною стабілізуючих регуляторів. Регулятори, що володіють такою властивістю, називаються *припустимими*.

Стандартний об'єкт \mathbf{G} задається у вигляді

$$\mathbf{G}(s) =: \begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & 0 & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & 0 \end{array}, \quad (3.2)$$

система (рис. 3.1) описується наступною системою рівнянь у просторі стану:

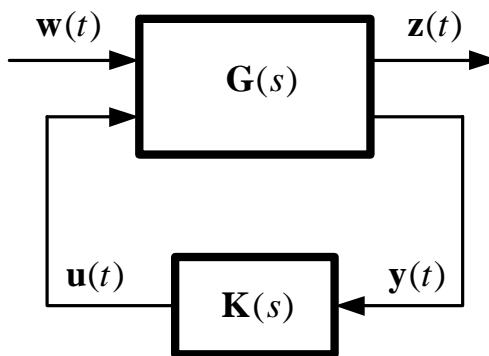


Рисунок 3.1 – Структурна схема синтезованої системи

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1\mathbf{w}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{z}(t) = \mathbf{C}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_2\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{21}\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{y}(t). \end{cases} \quad (3.3)$$

Структурна схема стандартного об'єкта (3.2) зображена, наприклад, на рис. 3.2 (за винятком змісту пунктирного прямокутника). Об'єкт (3.2) у даній постановці має наступні властивості:

а) пара $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1)$ – стабілізуюча, пара $(\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{N}}_1)$ – детектувальна;

б) пара $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$ – стабілізуюча, пара $(\mathbf{A}, \tilde{\mathbf{N}}_2)$ – детектувальна;

в) $\mathbf{D}_{12}^T [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{D}_{12}] = [0 \quad \mathbf{I}]$;

г) $\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{D}_{12} \end{bmatrix} \mathbf{D}_{12}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$.

Властивості а) і б) гарантують [26] відсутність уявних власних значень у матриць Гамільтона, що відповідають рівнянням Риккати по керуванню й фільтрації H^2 -проблеми, тобто приналежність матриць \mathbf{H}_2 і \mathbf{J}_2 (наведених нижче, див. (3.6) і (3.7)) області визначення оператора Риккати $\text{dom}(\text{Ric})$. Наявність цих властивостей гарантує еквівалентність внутрішньої стійкості – стійкості по початкових умовах і стійкості по входу-виходу [47].

Властивість в) означає ортогональність сигналів $\mathbf{C}_1\mathbf{x}(t)$ і $\mathbf{D}_{12}\mathbf{u}(t)$. В умовах H^2 -проблеми це означає, що вагова матриця керування у нормі вектора $\mathbf{z}(t) = \mathbf{C}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}(t)$ – одинична, і що на цю норму не оказують взаємного

впливу компонента $\mathbf{z}(t)$ від вектора станів $\mathbf{x}(t)$ і від вектора керування $\mathbf{u}(t)$. Це можна показати, знайшовши норму вектора

$$\begin{aligned} \mathbf{z}: \|\mathbf{z}\|^2 &= \mathbf{z}^T \mathbf{z} = (\mathbf{x}^T \mathbf{C}_1^T + \mathbf{u}^T \mathbf{D}_{12}^T)(\mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{u}) = \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{C}_1^T \mathbf{D}_{12} \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{D}_{12} \mathbf{u} = \mathbf{x}^T \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{u} \end{aligned}$$

тому що в силу умови в) $\mathbf{C}_1^T \mathbf{D}_{12} = \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{C}_1 = 0$ при $\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{D}_{12} = \mathbf{I}$. Якщо умова в) не дотримується, то можна досить легко зміною координат \mathbf{u} і \mathbf{z} привести $\mathbf{G}(s)$ до еквівалентної форми, де ця умова виконана. Властивість в) значне спрощує математичні викладення.

Властивість г) говорить про ортогональності сигналів $\mathbf{V}_1 \mathbf{w}(t)$ і $\mathbf{D}_{21} \mathbf{w}(t)$, що означає ортогональність компоненти від шуму, збудженої в стані $\mathbf{x}(t)$, і компоненти від шуму, збудженої в спостереженні $\mathbf{y}(t)$. У стохастичній задачі фільтрації LQG-теорії [48] умова $\mathbf{V}_1 \mathbf{D}_{12}^T = 0$ означає некорельованість шуму спостереження й шуму, збуджування стану, а $\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{D}_{12} = \mathbf{I}$ – невиродженість задачі фільтрації.

Таким чином, умови в) і г) є звичайними для H^2 -проблеми й за аналогією поширюються на H^∞ -випадок. Для $\mathbf{G}(s)$ у зображенні (3.1) також передбачається дотримання умов $\mathbf{D}_{11} = 0$ і $\mathbf{D}_{22} = 0$. Невиконання цих умов значною мірою ускладнює формули регуляторів [26]. Тоді доводиться застосовувати узагальнені рівняння Риккати, які набагато складніше використовуваних у цій главі. Існують методи зведення задачі з ненульовими \mathbf{D}_{11} й \mathbf{D}_{22} до задачі з об'єктом виду (3.1) шляхом досить складних перетворень.

3.2 H^2 -оптимальний регулятор

Задача синтезу H^2 -оптимального регулятора полягає в знаходженні того із припустимих регуляторів \mathbf{K}_2 для системи рис. 3.1, який мінімізує H^2 -норму передатної функції замкненої системи $\|\mathbf{T}_{zw}\|_2$. Можна показати, що мінімум цієї

H^2 -норми еквівалентний мінімуму функціонала якості $J(\mathbf{K})$ для лінійної квадратичної гауссовської проблеми в усталеному режимі [48].

3.2.1 Зіставлення LQG-і H^2 -задач оптимізації

Повна відсутність апріорної інформації про впливи не дозволяє одержати досить ефективного з інженерних позицій регулятора. Наприклад, універсальний (для будь-яких сигналів) алгоритм на основі методу найменших квадратів (і йому подібних) приводить до величезного обсягу необхідних обчислень.

Способи обліку виявлених відомостей про можливий характер сигналів (які дозволяють спрощувати алгоритми) з погляду різних математичних концепцій різні (у теорії розмитих множин, у теорії ймовірностей, у теорії Лебегових просторів). Чим більш повні представляються відомості, тем простіше можна зробити алгоритм керування, але в такій же пропорції зросте ризик розбіжності (внаслідок відхилення реальних характеристик від тих, які передбачалися при розрахунку). У цьому сенсі розрахунок на основі норм часто виявляється більш удалим у порівнянні з імовірнісним, використовуваним в LQG-задачі, який за певних умов по точності може виявитися еквівалентною задачі H^2 -оптимізації.

Дійсно, функціонал якості для LQG-оптимізації в усталеному режимі:

$$J(\mathbf{K}) = \lim_{t \rightarrow \infty} M \left\{ \text{trace} \left[\mathbf{z}(t) \mathbf{z}(t)^T \right] \right\},$$

де $M\{\cdot\}$ – знак операції математичного очікування;

$$\mathbf{z}(t) = \int_0^t \mathbf{T}_{zw}(t-\tau) \mathbf{w}(\tau) d\tau, \text{ а } \mathbf{T}_{zw}(t) = \alpha^{-1} [\mathbf{T}_{zw}(s)]$$

– МПФ системи (рис. 3.1).

З обліком того що система задовольняє умові неприступності минулого, можна записати

$$\mathbf{z}(t) = \int_{-\infty}^t \mathbf{T}_{zw}(t-\tau) \mathbf{w}(\tau) d\tau, \text{ а}$$

$$\begin{aligned}
J(\mathbf{K}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{M} \left\{ \text{trace} \left(\int_{-\infty}^t \mathbf{T}_{zw}(t - \tau_1) \mathbf{w}(\tau_1) d\tau_1 \right) \left(\int_{-\infty}^t \mathbf{T}_{zw}(t - \tau_2) \mathbf{w}(\tau_2) d\tau_2 \right)^T \right\} = \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t d\tau_1 \int_{-\infty}^t \text{trace} \left[\mathbf{T}_{zw}(t - \tau_1) \left\{ \mathbf{M} \left[\mathbf{w}(\tau_1) \mathbf{w}^T(\tau_2) \right] \right\} \mathbf{T}_{zw}^T(t - \tau_2) \right] d\tau_2,
\end{aligned}$$

тому що $\mathbf{T}_{zw}(t)$ – не випадкова функція.

Відомо, що в якості впливу, що $\mathbf{w}(t)$ обурює, в LQG-теорії розглядають білий шум, що має коваріаційну матрицю виду

$$\mathbf{M} \left[\mathbf{w}(t_1) \mathbf{w}^T(t_2) \right] = \mathbf{V}(t_1) \delta(t_2 - t_1), \quad (3.4)$$

де $\mathbf{V}(t_1)$ – матриця інтенсивності білого шуму.

Якщо білий шум стаціонарний з некорельованими компонентами, одиначної інтенсивності, то

$$\mathbf{V}(t_1) = \mathbf{I} \quad (3.5)$$

– одинична матриця відповідної розмірності, і

$$\begin{aligned}
J(\mathbf{K}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t d\tau_1 \int_{-\infty}^t \text{trace} \left[\mathbf{T}_{zw}(t - \tau_1) \left\{ \mathbf{I} \delta(\tau_2 - \tau_1) \right\} \mathbf{T}_{zw}^T(t - \tau_2) \right] d\tau_2 = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace} \left[\mathbf{T}_{zw}(t - \tau_1) \mathbf{T}_{zw}^T(t - \tau_1) \right] d\tau_1 = \|\mathbf{T}_{zw}\|_2^2.
\end{aligned}$$

Таким чином, $\inf_{\mathbf{K}} J(\mathbf{K}) = \inf_{\mathbf{K}} \|\mathbf{T}_{zw}\|_2^2$, тобто LQG-задача (за умови (3.3) і (3.4)) і задачі H^2 -оптимізації дають однаковий по точності алгоритм керування. Однак у реальних умовах H^2 -алгоритм швидше за все виявиться більш працездатним, тому що для роботи, його теорією, що відповідає передвіщеною, досить кінцівки 2-норми ПФ $\mathbf{T}_{zw}(t)$ реальної системи, а для LQG – необхідна $\mathbf{w}(t)$ відповідність реального сигналу умовам (3.4), (3.5), безсумнівно, більш важко здійсненним.

3.2.2 Алгоритм H^2 -оптимального регулятора

Введемо дві матриці Гамільтона:

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \\ -\mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & -\mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_2 \\ -\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T & -\mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

які відповідають алгебраїчним рівнянням Риккати по керуванню (3.8) і фільтрації (3.9) відповідно:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2 \mathbf{A} - \mathbf{X}_2 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_2 + \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 = 0, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_2 \mathbf{A}^T - \mathbf{Y}_2 \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_2 \mathbf{Y}_2 + \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T = 0, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{H}_2 \text{ і } \mathbf{J}_2 \in \text{dom}(\text{Ric}); \mathbf{X}_2 = \text{Ric}(\mathbf{H}_2), \mathbf{Y}_2 = \text{Ric}(\mathbf{J}_2)$$

– невід'ємно визначені, тому що стандартний об'єкт (3.2) має властивості а) і б) [26].

Введемо наступні матриці:

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_2, \mathbf{L}_2 = -\mathbf{Y}_2 \mathbf{C}_2^T, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{F}_2} = \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}_2, \mathbf{C}_{1\mathbf{F}_2} = \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{F}_2, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{A}_{\mathbf{L}_2} = \mathbf{A} + \mathbf{L}_2 \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_{1\mathbf{L}_2} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{L}_2 \mathbf{D}_{21}, \quad (3.12)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_2 = \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}_2 + \mathbf{L}_2 \mathbf{C}_2, \quad (3.13)$$

і матриці передатних функцій:

$$\mathbf{G}_c(s) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{\mathbf{F}_2} & \mathbf{I} \\ \hline \mathbf{C}_{1\mathbf{F}_2} & 0 \end{array} \right], \quad (3.14)$$

$$\mathbf{G}_f(s) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{\mathbf{L}_2} & \mathbf{B}_{1\mathbf{L}_2} \\ \hline \mathbf{I} & 0 \end{array} \right]. \quad (3.15)$$

В [43] сформульована теорема, що описує H^2 -оптимальний регулятор.

Теорема 3.1. Єдиний H^2 -оптимальний регулятор визначається форму-

лою

$$\mathbf{K}_2(s) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{A}}_2 & -\mathbf{L}_2 \\ \hline \mathbf{F}_2 & 0 \end{array} \right], \quad (3.16)$$

при цьому

$$\min \|\mathbf{T}_{zw}\|_2^2 = \|\mathbf{G}_c \mathbf{B}_1\|_2^2 + \|\mathbf{F}_2 \mathbf{G}_f\|_2^2 = \|\mathbf{G}_c \mathbf{L}_2\|_2^2 + \|\mathbf{C}_1 \mathbf{G}_f\|_2^2. \quad (3.17)$$

Структурна схема цього регулятора, відповідна до опису (3.16), разом з об'єктом наведена на рис. 3.3.

Для наступного порівняння з H^∞ -випадком також доцільно привести теорему, сформульовану в [43] про множину субоптимальних H^2 -регуляторів.

Теорема 3.3. Сімейство всіх припустимих H^2 -субоптимальних регуляторів, таких що $\|\mathbf{T}_{zw}\|_2 < \gamma$, містить множину усіх передатних матриць від $\mathbf{y}(t)$ до $\mathbf{u}(t)$ системи (рис. 3.3), де

$$\mathbf{M}_2(s) \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|cc} \hat{\mathbf{A}}_2 & -\mathbf{L}_2 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{F}_2 & 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{C}_2 & \mathbf{I} & 0 \end{array} \right], \quad (3.18)$$

$$\|\mathbf{Q}\|_2^2 < \gamma_2 - \left(\|\mathbf{G}_c \mathbf{B}_1\|_2^2 + \|\mathbf{F}_2 \mathbf{G}_f\|_2^2 \right), \quad \mathbf{Q} \in \mathbb{R}H^2. \quad (3.19)$$

Таким чином, сімейство субоптимальних регуляторів описане дрібно-раціональним перетворенням $\mathbf{F}_L(\mathbf{M}_2, \mathbf{Q})$ (див. п. 1.1.3) з вільним параметром \mathbf{Q} , що залежать від γ . Якщо покласти $\mathbf{Q} = 0$, то одержуємо \mathbf{K}_2 , який називається *центральним регулятором* у сімействі субоптимальних регуляторів $[\mathbf{F}_L(\mathbf{M}_2, \mathbf{Q})]_{\mathbf{Q}=0} = \mathbf{F}_{L0}(\mathbf{M}_2, \mathbf{Q})$.

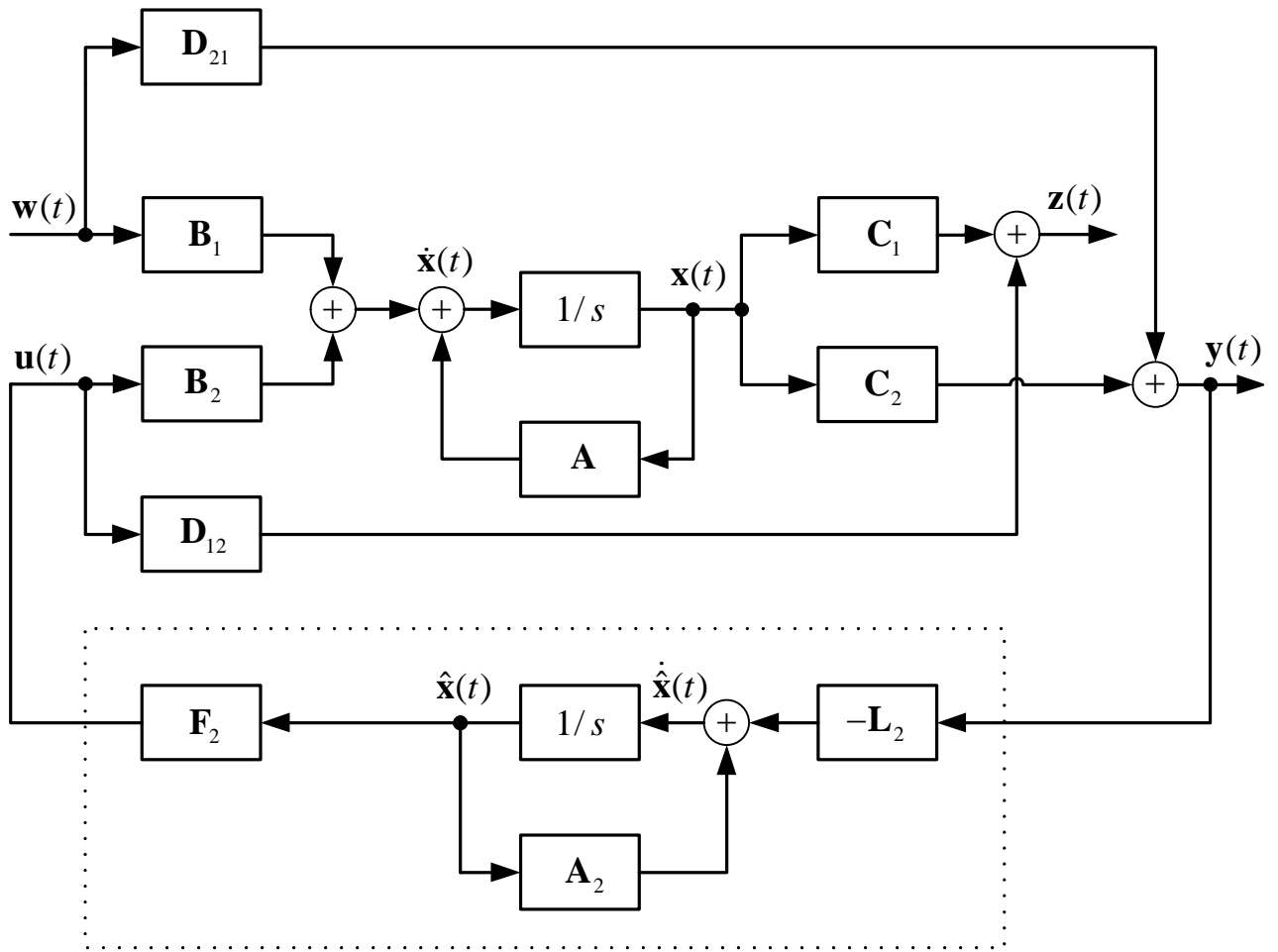


Рисунок 3.2 – Структурна схема H^2 -оптимальної системи

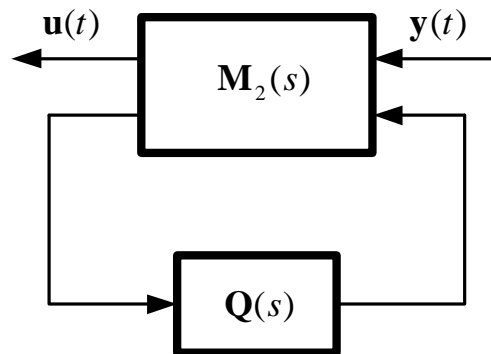


Рисунок 3.3 – Структурна схема H^2 -субоптимальних регуляторів

3.3 H^∞ -оптимальний регулятор

Використання H^∞ -норми передатної функції як критерію оптимальності засноване на тому факті, що ця норма – верхня грань коефіцієнта підсилення системи між 2-нормою входу й 2-нормою виходу (див. (1.17)). Тому H^∞ -норма \mathbf{T}_{zw} є корінь квадратний з енергії виходу при поданні на вхід збурювання з одиначною енергією. Таким чином, мінімізація $\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty$ означає мінімізацію енергії помилки для найгіршого випадку (з розглянутого класу (див. (3.1))) вхідного збурювання (див. (1.17)).

H^∞ -оптимальний регулятор набагато складніше H^2 -оптимального, і з погляду обчислювальних алгоритмів необхідна організація пошукової процедури (див. п. 1.1.7).

Для рішення H^∞ -проблеми оптимізації вводяться дві нові матриці Гамільтона:

$$\mathbf{H}_\infty = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \gamma^{-2}\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^T - \mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^T \\ -\mathbf{C}_1^T\mathbf{C}_1 & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

$$\mathbf{J}_\infty = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & \gamma^{-2}\mathbf{C}_1^T\mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2^T\mathbf{C}_2 \\ -\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^T & -\mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

відповідні до алгебраїчних рівнянь Риккати по керуванню (3.22) і фільтрації (3.23):

$$\mathbf{A}^T\mathbf{X}_\infty + \mathbf{X}_\infty\mathbf{A} - \mathbf{X}_\infty(\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^T - \gamma^{-2}\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^T)\mathbf{X}_\infty + \mathbf{C}_1^T\mathbf{C}_1 = 0, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{Y}_\infty + \mathbf{Y}_\infty\mathbf{A}^T - \mathbf{Y}_\infty(\mathbf{C}_2^T\mathbf{C}_2 - \gamma^{-2}\mathbf{C}_1^T\mathbf{C}_1)\mathbf{Y}_\infty + \mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^T = 0. \quad (3.23)$$

Важлива відмінність від (3.6) і (3.7) тут у тому, що праві верхні $-(1,2)$ блоки цих матриць знакове не визначені й залежать від параметра γ . Тому в теоремі 3.3 сформульованої в [43] про існування припустимого H^∞ -регулятора з'являються додаткові умови в порівнянні з теоремою 3.1. Помітимо також, що $(1,2)$ -блок \mathbf{H}_∞ являє собою суму $(1,2)$ блоків гамільтонових матриць для обчислення H^∞ -норми (1.22) і для синтезу H^2 -оптимального регулятора (3.6).

Теорема 3.3. Існує припустимий регулятор $\mathbf{K}_\infty(s)$ такий, що $\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty < \gamma$, якщо виконуються наступні умови:

$$1) \mathbf{H}_\infty \in \text{dom}(\text{Ric}) \text{ і } \mathbf{X}_\infty = \text{Ric}(\mathbf{H}_\infty) \geq 0;$$

$$2) \mathbf{J}_\infty \in \text{dom}(\text{Ric}) \text{ і } \mathbf{Y}_\infty = \text{Ric}(\mathbf{J}_\infty) \geq 0;$$

$$3) \rho(\mathbf{X}_\infty \mathbf{Y}_\infty) < \gamma^2,$$

де $\rho(\bullet)$ – спектральний радіус вираження в дужках.

Тоді регулятор задається наступними формулами:

$$\mathbf{K}_\infty(s) =: \left[\begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{A}}_\infty & -\mathbf{Z}_\infty \mathbf{L}_\infty \\ \mathbf{F}_\infty & 0 \end{array} \right], \quad (3.24)$$

де

$$\mathbf{F}_\infty = -\mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_\infty, \quad (3.25)$$

$$\mathbf{L}_\infty = -\mathbf{Y}_\infty \mathbf{C}_2^T, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{Z}_\infty = (\mathbf{I} - \gamma^{-2} \mathbf{Y}_\infty \mathbf{X}_\infty)^{-1}, \quad (3.27)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_\infty = \mathbf{A} + \gamma^{-2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}_\infty + \mathbf{Z}_\infty \mathbf{L}_\infty \mathbf{C}_2, \quad (3.28)$$

Наступна теорема [43] дає параметризовану множину H^∞ -субоптимальних регуляторів.

Теорема 3.4. Якщо виконуються умови 1) – 3) теореми 3.3, то множина припустимих регуляторів, таких що $\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty < \gamma$, описуються множиною передатних функцій від $\mathbf{y}(t)$ до $\mathbf{u}(t)$ системи (рис. 3.4), де

$$\mathbf{M}_\infty(s) =: \left[\begin{array}{c|cc} \hat{\mathbf{A}}_\infty & -\mathbf{Z}_\infty \mathbf{L}_\infty & \mathbf{Z}_\infty \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{F}_\infty & 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{C}_2 & \mathbf{I} & 0 \end{array} \right], \quad (3.29)$$

$$\mathbf{Q} \in \mathbb{R}H^\infty, \quad \|\mathbf{Q}\|_\infty < \gamma. \quad (3.30)$$

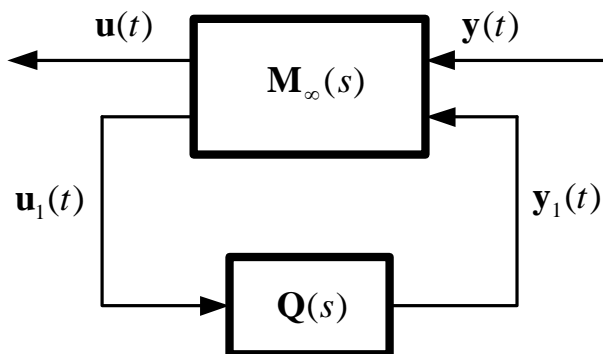


Рисунок 3.4 – Структура множини H^∞ -субоптимальних регуляторів

Таким чином, сімейство субоптимальних регуляторів представляється \mathbf{M}_{q^∞} – передатною функцією замкненої системи рис. 3.4 з вільним параметром \mathbf{Q} , що задовольняють (3.30), тобто дрібно-раціональним перетворенням $\mathbf{M}_{q^\infty} = \mathbf{F}_L(\mathbf{M}_\infty, \mathbf{Q})$. При $\mathbf{Q} = 0$ з \mathbf{M}_∞ отримуємо центральний регулятор \mathbf{K}_∞ . Структурна схема параметризованої множини регуляторів з об'єктом наведена на рис. 3.5.

3.4 Спеціальні проблеми

Для всіх трьох проблем розглядається система, що відповідає рис. 3.1, але з різною структурою стандартного об'єкта $\mathbf{G}(s)$.

Виклад кожної проблеми будується в такий спосіб: спочатку розглядається конкретні відмінності, що спрощують, постановки даної проблеми від постановки загальної проблеми оптимізації за допомогою зворотного зв'язку по виходу ($\mathbf{y}(t)$) (див. п. 3.1), у силу яких спеціальна проблема вирішується набагато простіше вихідної (загальної) (див. наприклад, [26]). Потім без виводу приводяться п'ять наступних результатів рішення спеціальної проблеми:

1. Мінімум $\|\mathbf{T}_{zw}\|_2$.
3. Єдиний регулятор, який мінімізує $\|\mathbf{T}_{zw}\|_2$.

3. Сімейство регуляторів, таких що $\|\mathbf{T}_{zw}\|_2 < \gamma$, тут і скрізь далі γ більше мінімуму відповідної норми.

4. Необхідна й достатня умова для існування регулятора такого, що $\|\mathbf{T}_{zw}\|_2 < \gamma$.

5. Сімейство всіх регуляторів, такі що $\|\mathbf{T}_{zw}\|_2 < \gamma$, і формула центрального регулятора.

У всіх випадках $\mathbf{K}(s)$ є припустимим регулятором.

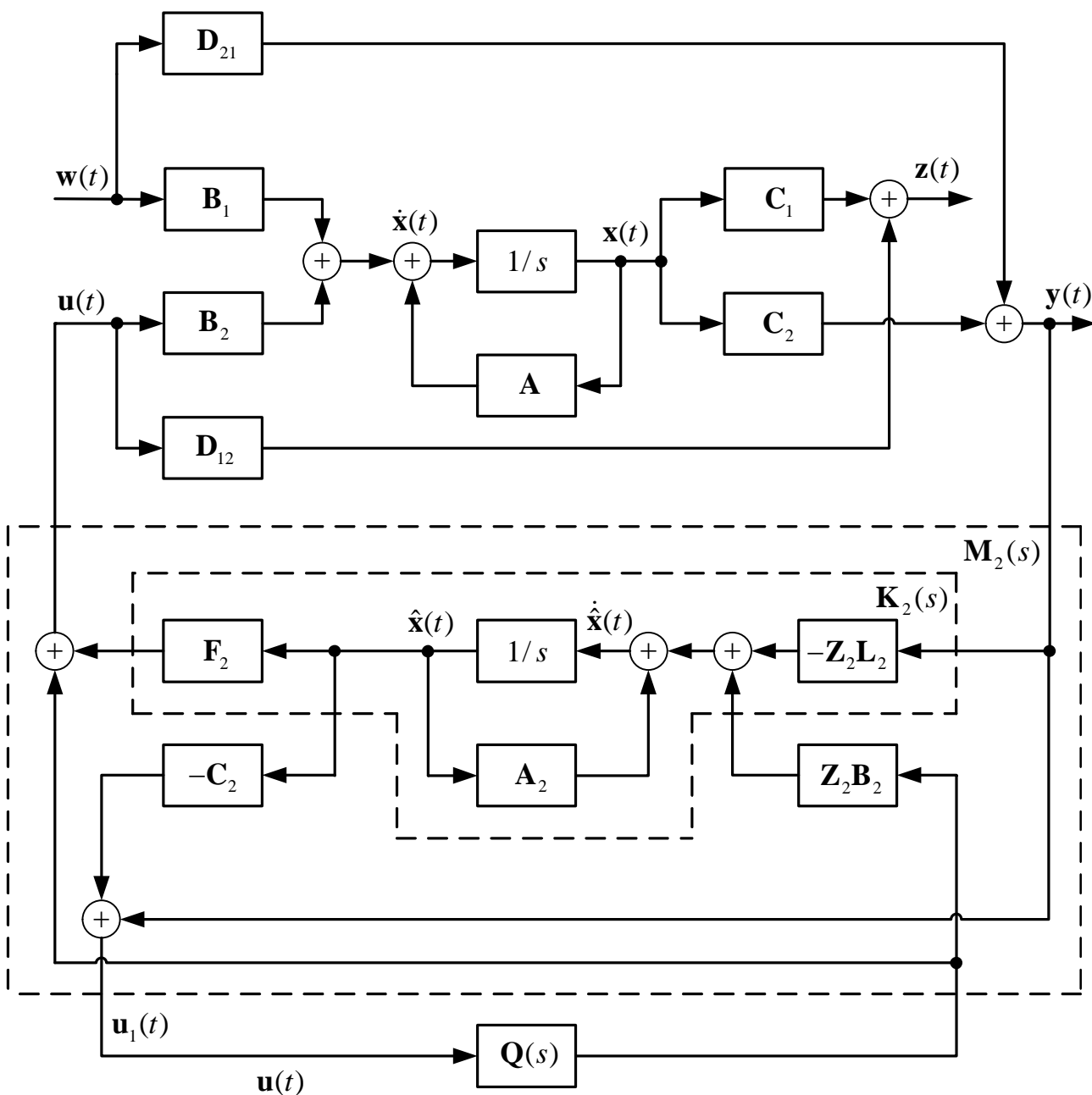


Рисунок 3.5 – Структурна схема множини H^∞ -субоптимальних систем

3.4.1 Проблема повної інформації (FI)

Стандартний об'єкт для проблеми FI має такий вигляд:

$$\mathbf{G}_{FI}(s) =: \left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & 0 & \mathbf{D}_{12} \\ \hline \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline 0 & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{array} \right]. \quad (3.31)$$

Тут $\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{D}_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$, $\mathbf{D}_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, що означає (див. (3.3)):

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{w}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t),$$

– не тільки те, що у $\mathbf{y}(t)$ відсутні деякі компоненти векторів $\mathbf{x}(t)$ і $\mathbf{w}(t)$, але й те, що ті компоненти \mathbf{x} , які проходять на вихід (\mathbf{x}_y), не змішуються з компонентами вектора \mathbf{w} (\mathbf{w}_y) на вихід, які пройшли. Таким чином, безпосередньо доступний споживачеві (для організації зворотного зв'язку) сигнал $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_w \\ \mathbf{y}_x \end{bmatrix}$ є вектор, що полягає із частини ($\mathbf{y}_x \equiv \mathbf{x}_y$) чистих (не змішаних із шумом) компонентів вектора стану, і із частини ($\mathbf{y}_w \equiv \mathbf{w}_y$) чистих (не змішаних зі станом) компонентів вектора збурювань. Ця проблема називається проблемою повної інформації в силу того, що опинившись у розпорядженні споживача частини вектора стану досить (через властивості а) і б) об'єкта) для досягнення оптимальності. Причому ця частина вектора стану отримана без фільтрації (вона, як уже говорилося, не змішувалася із шумом), а частина яка пройшла на вихід вектора шуму в даному випадку споживачем повністю помітна, тому може просто не подаватися в ланцюг зворотного зв'язку. Тому FI можна розглядати як задачу зворотного зв'язку по стану.

Умови на $\mathbf{G}(s)$ в проблемі повної інформації, наслідуювані від випадку зворотного зв'язку по виходу:

а) $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1)$ – стабілізуюча, $(\mathbf{A}, \mathbf{C}_1)$ – детектувальна;

б) $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2)$ – стабілізуюча;

$$\text{в) } \mathbf{D}_{12}^T [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{D}_{12}] = [0 \quad \mathbf{I}].$$

Результати для випадку повної інформації:

$$\text{FI.1: } \min \|\mathbf{T}_{zw}\|_2 = \|\mathbf{G}_c \mathbf{B}_1\|_2.$$

$$\text{FI.2: } \mathbf{K}_{2_0} = [\mathbf{F}_2 \quad 0].$$

$$\text{FI.3: } \mathbf{K}_2(s) = [\mathbf{F}_2 \quad \mathbf{Q}(s)], \text{ де } \|\mathbf{Q}\|_2^2 < \gamma^2 - \|\mathbf{G}_c \mathbf{B}_1\|_2^2, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}H^2.$$

$$\text{FI.4: } \mathbf{H}_\infty \in \text{dom}(\text{Ric}) \text{ і } \mathbf{X}_\infty = \text{Ric}(\mathbf{H}_\infty) \geq 0.$$

$$\text{FI.5: } \mathbf{K}_\infty(s) = \left[\mathbf{F}_\infty - \mathbf{Q}(s)\gamma^{-1}\mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty \quad \middle| \quad \mathbf{Q}(s) \right]$$

$$\text{де } \mathbf{Q} \in \mathbb{R}H^\infty, \|\mathbf{Q}\|_\infty < \gamma, \mathbf{K}_{\infty 0} = [\mathbf{F}_\infty \quad 0].$$

H^2 -оптимальний регулятор, як і центральний H^∞ -оптимальний регулятор, являє собою просто оптимальний регулятор без фільтра, тому що обидва регулятора визначаються тільки рішенням рівняння Риккати по керуванню: H^2 -регулятор – $\mathbf{X}_2 = \text{Ric}(\mathbf{H}_2)$, а H^∞ -регулятор – $\mathbf{X}_\infty = \text{Ric}(\mathbf{H}_\infty)$. Відмінність полягає в тому, що в H^∞ -випадку до складу регулятора $\mathbf{K}_\infty(s)$ входить ще й матриця \mathbf{B}_1 , що визначає вплив збурювання. На рис. 3.6 зображена структурна схема $\mathbf{G}_{\text{FI}}(s)$ й центрального H^∞ -регулятора $\mathbf{K}_{\infty 0}(s)$ (структура для H^2 -випадку аналогічна).

При замиканні об'єкта $\mathbf{G}_{\text{FI}}(s)$ регулятором $\mathbf{K}_{\infty 0}(s)$ одержуємо наступну передатну функцію замкненої системи:

$$\mathbf{T}_{zw} \stackrel{s}{=} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{\text{F}\infty} & \mathbf{B}_1 \\ \hline \mathbf{C}_{1\text{F}\infty} & 0 \end{array} \right], \quad (3.32)$$

$$\mathbf{A}_{\text{F}\infty} = \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}_\infty,$$

$$\mathbf{C}_{1\text{F}\infty} = \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \mathbf{F}_\infty.$$

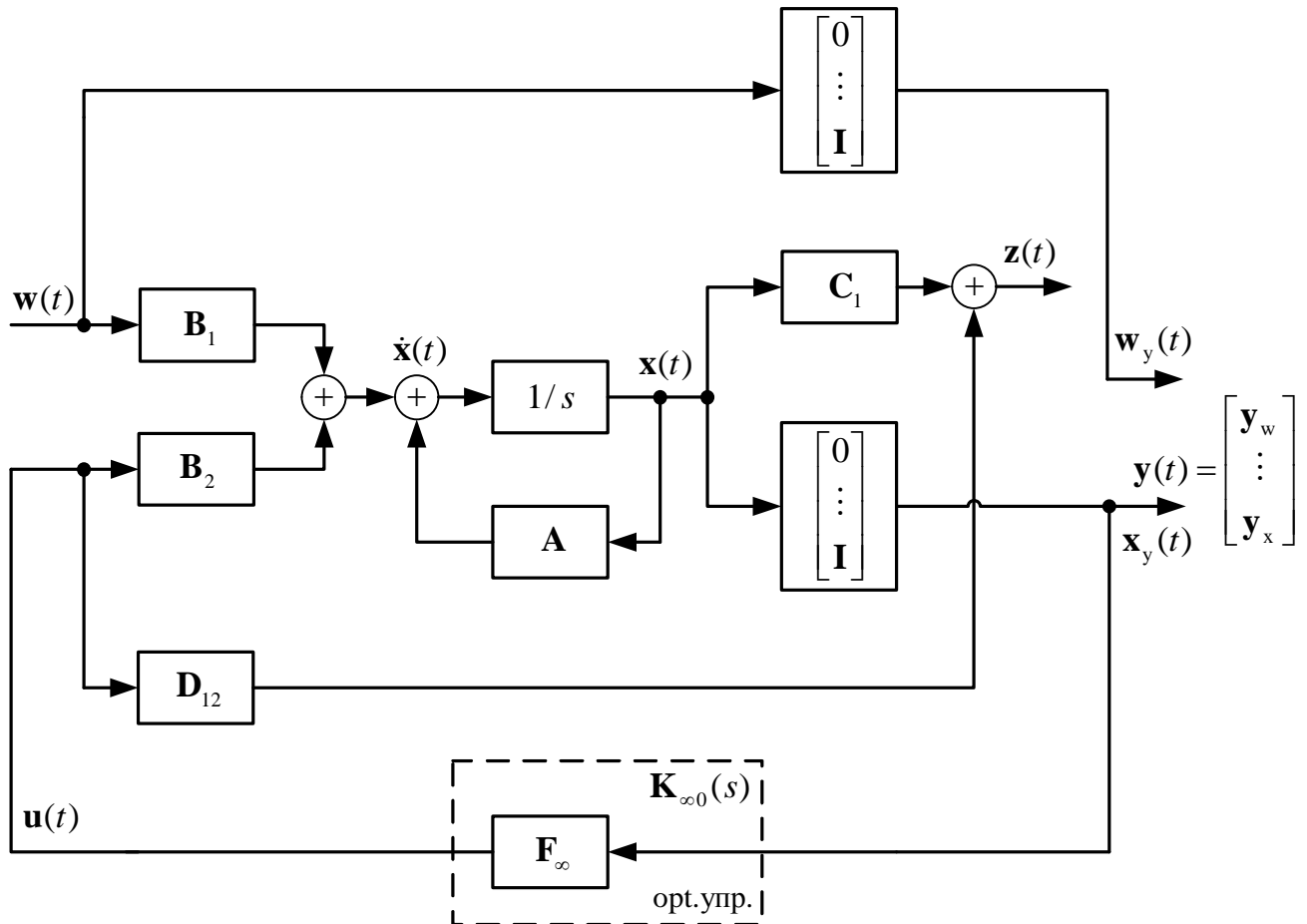


Рисунок 3.6 – H^∞ -субоптимальна система ФІ-проблеми
с центральним регулятором

3.4.2 Проблема повного керування (FC)

Ця проблема дуальна случаю повної інформації й має такий вигляд стандартного об'єкта:

$$\mathbf{G}_{\text{FC}}(s) =: \begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & [\mathbf{I} \ 0] \\ \hline \mathbf{C}_1 & 0 & [0 \ \mathbf{I}] \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & [0 \ 0] \end{array}. \quad (3.33)$$

У цьому випадку пояснення назви задачі важко дати, безпосередньо опираючись на особливості структури об'єкта (як це вдалося в попередньому пункті). Лише в процесі її рішення [26] з'ясовується, що регулятор визначається рішенням тільки одного рівняння Риккаті, що відповідає \mathbf{J}_2 в H^2 -випадку й \mathbf{J}_∞ в

H^∞ -випадку (рівняння оптимальної фільтрації). Це свідчить про те, що фільтрація відразу дає повне керування (див. назву проблеми).

Проблема FC успадковує від загального випадку зворотного зв'язку по виходу наступні властивості:

а) $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1)$ – стабілізуюча, $(\mathbf{A}, \mathbf{C}_1)$ – детектувальна;

б) $(\mathbf{A}, \mathbf{C}_2)$ – стабілізуюча;

$$\text{в) } \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix} \mathbf{D}_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Результати для проблеми повного керування:

$$\text{FC.1: } \min \|\mathbf{T}_{zw}\|_2 = \|\mathbf{C}_1 \mathbf{G}_f\|_2 \text{ (див. (3.15)).}$$

$$\text{FC.2: } \mathbf{K}_{2_0} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{FC.3: } \mathbf{K}_2(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{Q}(s) \end{bmatrix}, \text{ де } \|\mathbf{Q}\|_2^2 < \gamma - \|\mathbf{C}_1 \mathbf{G}_f\|_2^2, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}H^2.$$

$$\text{FC.4: } \mathbf{J}_\infty \in \text{dom}(\text{Ric}) \text{ і } \mathbf{Y}_\infty = \text{Ric}(\mathbf{J}_\infty) \geq 0.$$

$$\text{FC.5: } \mathbf{K}_\infty(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_\infty - \gamma^{-1} \mathbf{Y}_\infty \mathbf{C}_1^T \mathbf{Q}(s) \\ \mathbf{Q}(s) \end{bmatrix}.$$

де

$$\mathbf{Q} \in \mathbb{R}H^2, \|\mathbf{Q}\|_\infty < \gamma, \mathbf{K}_{\infty 0}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_\infty \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Структурна схема для центрального H^∞ -регулятора зображена на рис. 3.7 H^2 -оптимальний регулятор має подібну структуру.

3.4.3 Проблема оцінки виходу (ОЕ)

Стандартний об'єкт має наступну структуру:

$$\mathbf{G}_{\text{OE}}(s) =: \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 & 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

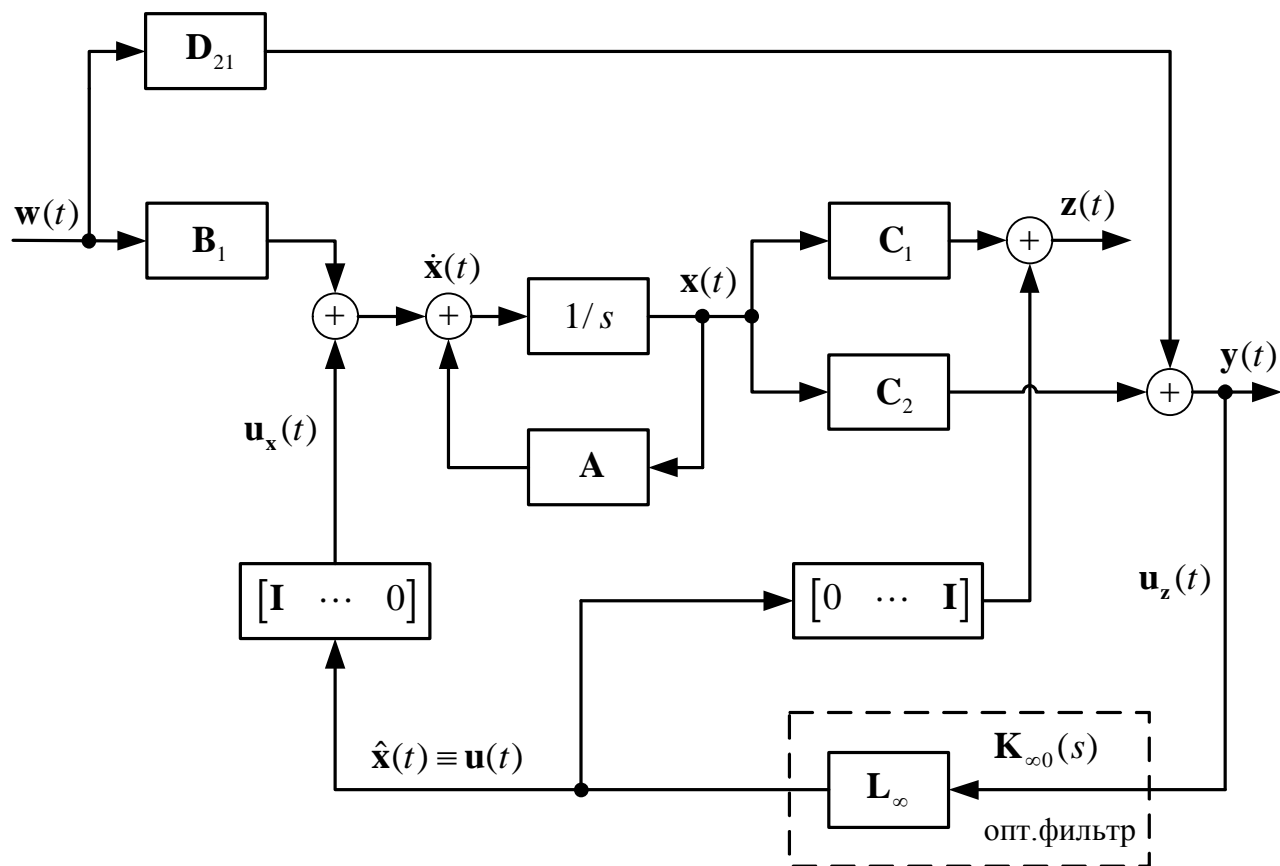


Рисунок 3.7 – H^∞ -субоптимальна система FC-проблеми
с центральним регулятором

Ця проблема накладає додаткові умови на стабілізуючу пару $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1)$: повинна дотримуватися стійкість матриці $\mathbf{A} - \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_1$, тому властивості об'єкта для ОЕ-проблеми наступні:

$$\text{ОЕ.1: } \min \|\mathbf{T}_{zw}\|_2 = \|\mathbf{C}_1 \mathbf{G}_f\|_2.$$

$$\text{ОЕ.2: } \mathbf{K}_{2_0}(s) =: \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} + \mathbf{L}_2 \mathbf{C}_2 - \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_1 & -\mathbf{L}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & 0 \end{array} \right].$$

ОЕ.3: $\mathbf{K}_2(s)$ – множина передатних матриць від $\mathbf{y}(t)$ до $\mathbf{u}(t)$, відповідних до схеми (рис. 3.3), де

$$\mathbf{M}_2(s) =: \left[\begin{array}{cc|cc} \mathbf{A} + \mathbf{L}_2 \mathbf{C}_2 - \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_1 & \mathbf{L}_2 & -\mathbf{B}_2 & \\ \hline \mathbf{C}_1 & 0 & \mathbf{I} & \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{I} & 0 & \end{array} \right],$$

$$\|\mathbf{Q}\|_2^2 < \gamma - \|\mathbf{C}_1 \mathbf{G}_f\|_2^2, \quad \mathbf{Q} \in \mathbb{R}H^2.$$

ОЕ.4: $\mathbf{J}_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$ і $\mathbf{Y}_\infty = \text{Ric}(\mathbf{J}_\infty) \geq 0$.

ОЕ.5: $\mathbf{K}_\infty(s)$ – множина передатних матриць від $\mathbf{y}(t)$ до $\mathbf{u}(t)$, відповідних до схеми (рис. 3.4), де

$$\mathbf{M}_\infty(s) =: \left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{A} + \mathbf{L}_\infty \mathbf{C}_2 - \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_1 & \mathbf{L}_2 & -\mathbf{B}_2 - \gamma^{-1} \mathbf{C}_1^T \mathbf{Q}(s) \\ \hline \mathbf{C}_1 & 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{I} & 0 \end{array} \right],$$

$$\mathbf{Q} \in \mathbb{R}H^2, \|\mathbf{Q}\|_\infty < \gamma,$$

$$\mathbf{K}_{\infty 0}(s) =: \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} + \mathbf{L}_\infty \mathbf{C}_2 - \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_1 & \mathbf{L}_\infty \\ \hline \mathbf{C}_1 & 0 \end{array} \right].$$

Структурна схема для ОЕ-проблеми представлена на рис. 3.8 (для випадку H^2 -оптимізації). З рис. 3.8 помітно, що $\mathbf{z}(t) = \mathbf{z}_x(t) + \mathbf{u}(t) = \mathbf{C}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)$, і що $\mathbf{u}(t) = \mathbf{C}_1 \hat{\mathbf{x}}(t) = \hat{\mathbf{z}}_x(t)$, з обліком чого $\mathbf{u}(t) + \mathbf{u}(t) = \hat{\mathbf{z}}_x(t) + \mathbf{u}(t) = \hat{\mathbf{z}}(t)$ (див. вираження для $\mathbf{z}(t)$), тобто $\mathbf{u}(t) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{z}}(t)$ – центральний оптимальний ОЕ-регулятор дає оцінку виходу $\mathbf{z}(t)$, звідки й назва цієї спеціальної проблеми.

3.5 О структурі й властивості H^2 -оптимального регулятора

3.5.1 Загальна інтерпретація проблеми з позиції принципу роздільності

У цьому розділі загальна H^2 -проблема зворотного зв'язку по виходу представляється на основі принципу розділу у вигляді комбінації двох спеціальних проблем: проблеми повної інформації й проблеми оцінки виходу. З обліком (3.10) – (3.17) єдиний H^2 -оптимальний регулятор визначається як:

$$\mathbf{K}_2(s) =: \left[\begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{A}}_2 & -\mathbf{L}_2 \\ \hline \mathbf{F}_2 & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}_2 + \mathbf{L}_2 \mathbf{C}_2 & \mathbf{Y}_2 \mathbf{C}_2^T \\ \hline -\mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_2 & 0 \end{array} \right]. \quad (3.35)$$

$$\min \|\mathbf{T}_{zw}\|_2^2 = \|\mathbf{G}_c \mathbf{B}_1\|_2^2 + \|\mathbf{F}_2 \mathbf{G}_f\|_2^2.$$

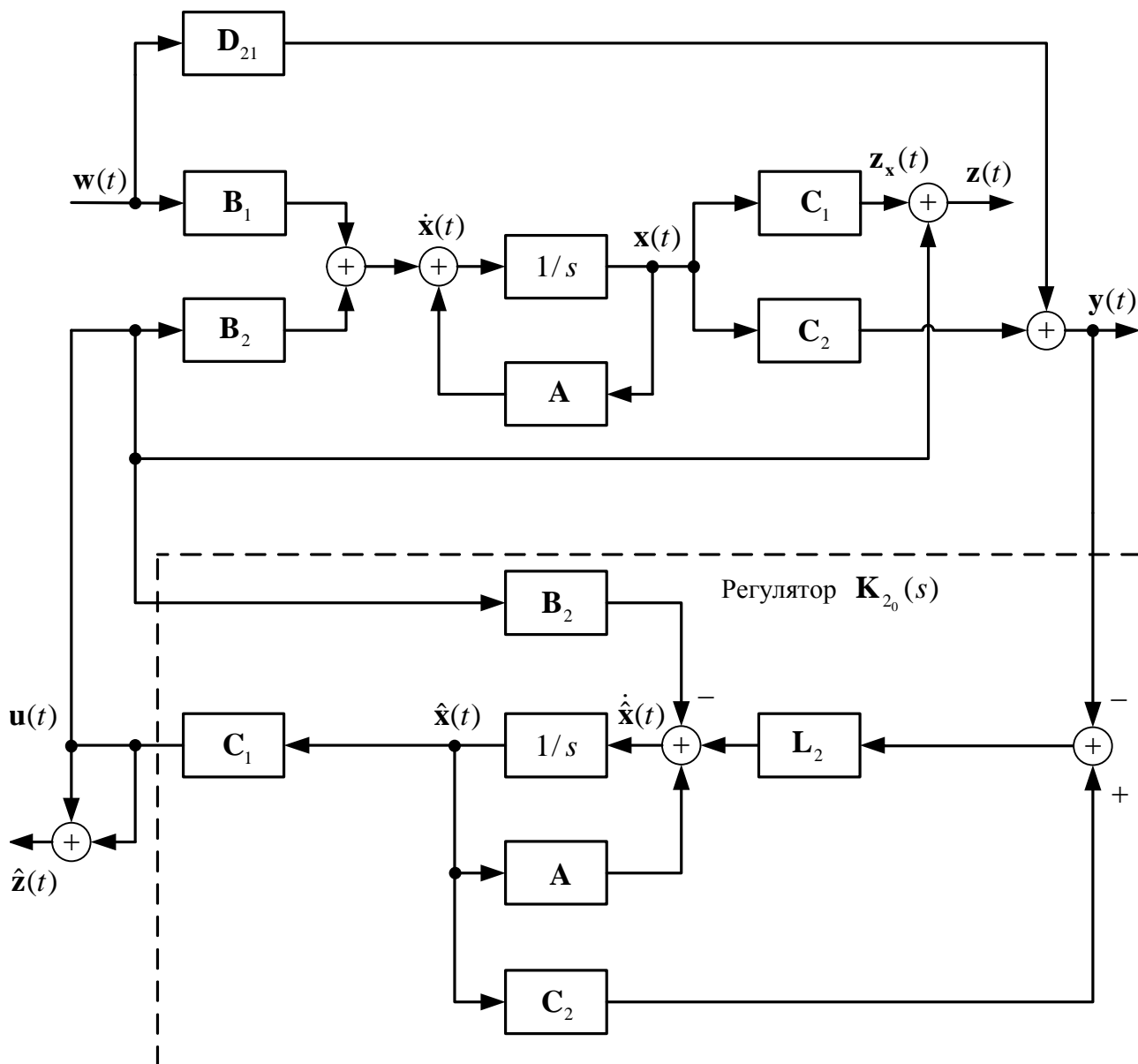


Рисунок 3.8 – H^2 -оптимальна система ОЕ-проблеми

У цих формулах \mathbf{F}_2 – матриця коефіцієнтів підсилення оптимального зворотного зв'язку по стану в проблемі повної інформації й \mathbf{L}_2 – оптимальний зворотний зв'язок у проблемі повного керування. Принцип роздільності полягає в тому [48], що рішення задачі лінійного оптимального регулювання зі зворотним зв'язком по вихідній змінній може бути отримане як рішення задачі оптимального керування зі зворотним зв'язком по стану $\mathbf{x}(t)$ заміняється його оптимальною оцінкою $\hat{\mathbf{x}}(t)$, яка може бути отримана як рішення задачі тільки оптималь-

ного спостереження. На основі принципу роздільності можна сказати, що $\mathbf{K}_2(s)$ (3.35) є оптимальний формувач керування (\mathbf{F}_2) з оптимальної оцінки $\hat{\mathbf{x}}(t)$ проблеми ОЕ й може бути отриманий заміною $\tilde{\mathbf{N}}_1$ на \mathbf{F}_2 в ОЕ.3. Також те, що оцінка мінімуму $\|\mathbf{T}_{zw}\|_2$ є сума оцінки в FІ-проблемі (див. вираження FІ.1) і оцінки в ОЕ-проблемі, у якій (як і в нашому випадку) $\tilde{\mathbf{N}}_1$ замінена на \mathbf{F}_2 (див. ОЕ.1). Таким чином, рівняння регулятора можуть бути записані у вигляді оптимального спостерігача (3.36 а) і формувача оптимального керування (3.36 б):

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}_2(\underbrace{\mathbf{C}_2\hat{\mathbf{x}}(t)}_{\hat{\mathbf{y}}(t)} - \mathbf{y}(t)); \quad (3.36 \text{ а})$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{F}_2\hat{\mathbf{x}}(t); \quad (3.36 \text{ б})$$

де $\hat{\mathbf{x}}(t)$ – ОЕ-оптимальна оцінка вектора $\mathbf{x}(t)$ (те, що тут фігурує саме ОЕ-оцінка, доведене в ході наступних викладень (див. (3.42) і далі)).

Структурна схема об'єкта й регулятора, що відповідає (3.35), наведена на рис. 3.9 без штрихпунктиру.

3.5.2 Інтерпретація теорем 3.1, 3.2 з позиції принципу роздільності

З позиції принципу розділення можна інтерпретувати умови теорем, сформульованих у розділі 3.3. Для цього визначимо нову змінну $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{F}_2\mathbf{x}$ й підставимо її в частину рівнянь (3.3), що описує об'єкт, одержимо:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2(\mathbf{v} + \mathbf{F}_2\mathbf{x}), \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{12}(\mathbf{v} + \mathbf{F}_2\mathbf{x}), \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{F}_2)\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{v}, \\ \mathbf{z} = (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{F}_2)\mathbf{x} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{v}, \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}, \end{cases} \quad \Rightarrow$$

або, у силу лінійності об'єкта, для його частини:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_w = (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{F}_2)\mathbf{x}_w + \mathbf{B}_1\mathbf{w}; \\ \dot{\mathbf{x}}_v = (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{F}_2)\mathbf{x}_v + \mathbf{B}_2\mathbf{v}; \\ \mathbf{z} = \mathbf{z}_w + \mathbf{z}_v = [(\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{F}_2)\mathbf{x}_w + 0\mathbf{w}] + [(\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\mathbf{F}_2)\mathbf{x}_v + \mathbf{D}_{12}\mathbf{v}], \end{cases}$$

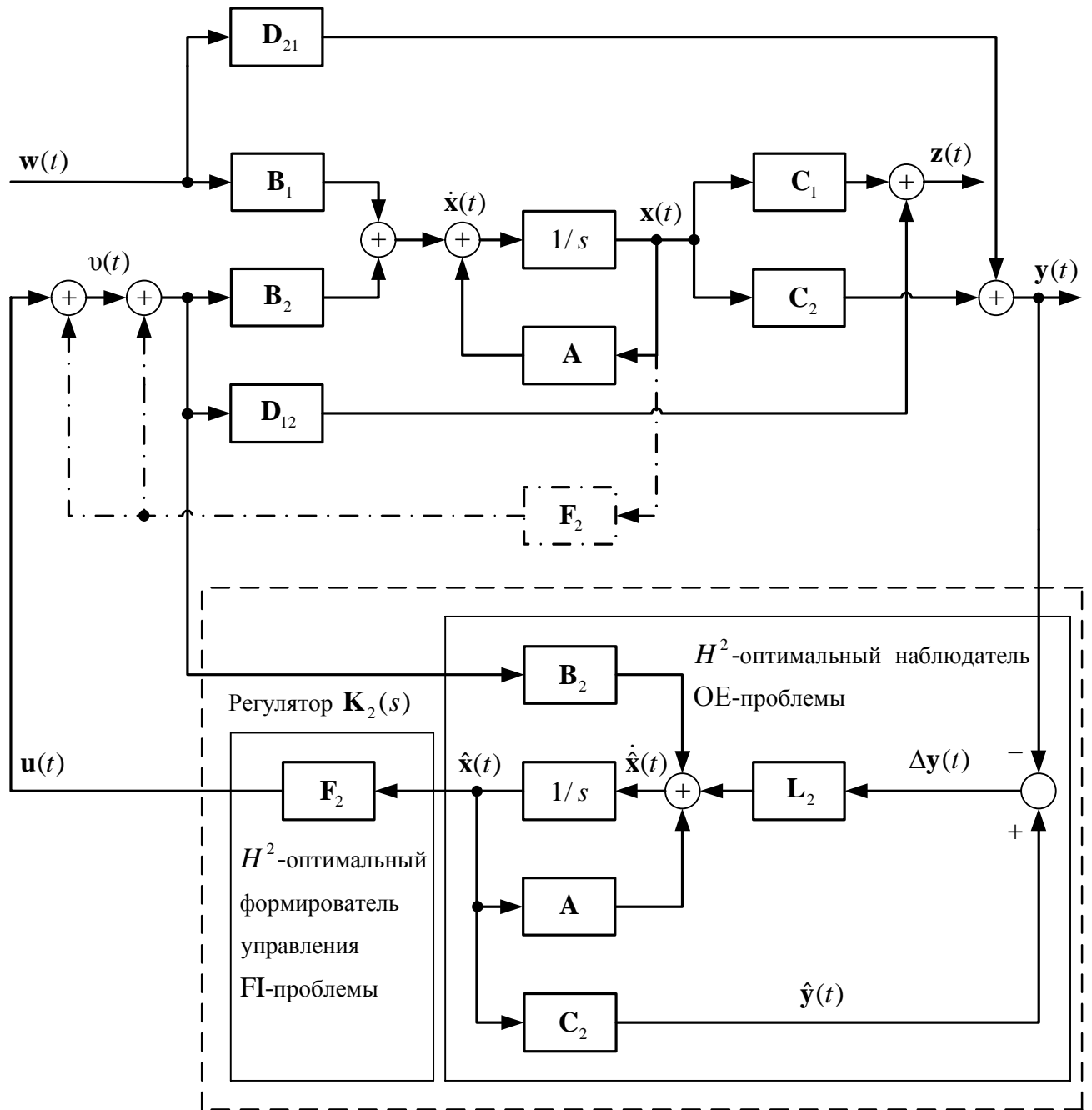


Рисунок 3.9 – H^2 -оптимальна система

звідки з урахуванням формули (3.11) одержуємо, що зв'язок вектора $\begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}$ з \mathbf{z}

має вигляд

$$\mathbf{z} = \left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{A}_{F_2} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_{1F_2} & 0 & \mathbf{D}_{12} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix},$$

який в області комплексної змінної відповідає співвідношення

$$\mathbf{z}(s) = \mathbf{G}_c \mathbf{B}_1 \mathbf{w}(s) + \mathbf{U} \mathbf{v}(s), \quad (3.37)$$

де $\mathbf{G}_c(s)$ визначається формулою (3.14), а

$$\mathbf{U}(s) =: \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{F_2} & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_{1F_2} & \mathbf{D}_{12} \end{array} \right]. \quad (3.38)$$

Помітимо, що матриця

$$\mathbf{A}_{F_2} = \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}_2 = \mathbf{A} - \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_2$$

– стійка в силу теореми сформульованої в [43], якщо \mathbf{X}_2 є рішенням рівняння Риккати (3.8). Виходить, і передатна матриця $\mathbf{U}(s)$ – стійка. Доведемо, що вона є інором, скориставшись лемою наведеної в [43].

Припустимо, що умова 1) леми [43] для матриці $\mathbf{U}(s)$:

$$\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{C}_{1F_2} + \mathbf{B}_2^T \mathbf{Q} = 0 \quad (3.39)$$

вірно, тоді покажемо, що \mathbf{Q} з вираження (3.39) відповідає рівнянню Ляпунова, що відповідає $\mathbf{U}(s)$: $\mathbf{A}_{F_2}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}_{F_2} + \mathbf{C}_{1F_2}^T \mathbf{C} = 0$. (Умова 2 леми дотримується, тому що в силу властивості об'єкта $\mathbf{G}(s)$: $\mathbf{D}_{12}^T [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{D}_{12}] = [0 \quad \mathbf{I}] \Rightarrow \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{D}_{12} = \mathbf{I}$. Крім того, ще й $\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{C}_1 = 0$). З (3.39) маємо

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_2^T \mathbf{Q} &= -\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{C}_{1F_2} = -\mathbf{D}_{12}^T (\mathbf{C}_1 - \mathbf{D}_{12} \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_2) = \\ &= -\mathbf{D}_{12}^T \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{D}_{12} \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_2 = -0 + \mathbf{I} \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_2 = \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_2. \end{aligned}$$

Таким чином, одержали, що \mathbf{Q} з (3.39) є \mathbf{X}_2 – рішенням рівняння Риккати (3.8) – симетричної, а в силу цього, матрицею. Підставимо його в рівняння Ляпунова:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{F_2}^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q} \mathbf{A}_{F_2} + \mathbf{C}_{1F_2}^T \mathbf{C}_{1F_2} &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_2)^T \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2 (\mathbf{A} - \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_2) + \\ &+ (\mathbf{C}_1 - \mathbf{D}_{12} \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_2)^T (\mathbf{C}_1 - \mathbf{D}_{12} \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_2) = \mathbf{A}^T \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_2 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2 \mathbf{A} - \\ &- \mathbf{X}_2 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_2 + \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 - \mathbf{X}_2 \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_1^T \mathbf{D}_{12} \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2 \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{D}_{12} \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_2 = \\ &= \mathbf{A}^T \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2 \mathbf{A} - 2 \mathbf{X}_2 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_2 + \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 - 0 - 0 + \mathbf{X}_2 \mathbf{B}_2 \mathbf{I} \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_2 = \\ &= \mathbf{A}^T \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2 \mathbf{A} - \mathbf{X}_2 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_2 + \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1. \end{aligned}$$

Ми одержали ліву частину рівняння Риккати (3.8), яка матрицею \mathbf{X}_2 (що є рішенням (3.8)) перетворюється в тотожний нуль. Але в цю ліву частину рівняння Риккати перейшла ліва частина рівняння Ляпунова (див. початок даного вираження) при $\mathbf{Q} = \mathbf{X}_2$. Виходить, \mathbf{X}_2 перетворює в тотожний нуль і ліву частину рівняння Ляпунова з леми [43], тобто задовольняє й цьому рівнянню, але тоді виконуються умови леми [43], і $\mathbf{U}(s)$ є інором, і її норма тому дорівнює 1.

Щойно введена змінна $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{F}_2 \mathbf{x}$ не є незалежна змінна (рис. 3.9 зі штрихпунктиром (еквівалентного рис. 3.9 без штрихпунктира), де ця змінна виявлена, помітно, що \mathbf{v} визначається \mathbf{w}). Тому (3.37) можна представити

$$\mathbf{z} = \mathbf{G}_c \mathbf{B}_1 \mathbf{w} + \mathbf{U} \mathbf{T}_{vw} \mathbf{w} = [\mathbf{G}_c \mathbf{B}_1 + \mathbf{U} \mathbf{T}_{vw}] \mathbf{w}$$

Оскільки тут розглядається завдання мінімізації $\|\mathbf{T}_{zw}\|_2$, норма $\|\mathbf{G}_c \mathbf{B}_1 + \mathbf{U} \mathbf{T}_{vw}\|_2$ – мінімальна, тому що з попереднього співвідношення помітно, що $\mathbf{G}_c \mathbf{B}_1 \mathbf{w} + \mathbf{U} \mathbf{T}_{vw} \mathbf{w} = \mathbf{T}_{zw}$. Але тоді

$$\gamma_{m_2} = \min \|\mathbf{T}_{zw}\|_2 = \min \|\mathbf{G}_c \mathbf{B}_1 + \mathbf{U} \mathbf{T}_{vw}\|_2 \leq \|\mathbf{G}_c \mathbf{B}_1\|_2 + \|\mathbf{U} \mathbf{T}_{vw}\|_2 = \|\mathbf{G}_c \mathbf{B}_1\|_2 + \|\mathbf{T}_{vw}\|_2,$$

тому що $\mathbf{U}(s)$ – інор. Очевидно, що останнє співвідношення може бути дорівнювати γ_{m_2} тільки у випадку мінімальності кожного з доданків, тобто

$$\gamma_{m_2} = \min \|\mathbf{G}_c \mathbf{B}_1\|_2 + \min \|\mathbf{T}_{vw}\|_2.$$

Згідно результату FI.1, $\|\mathbf{G}_c \mathbf{B}_1\|_2$ у рамках проблеми FI (яка, як було показано в п. 3.5.1, є складовою частиною розв'язуваної задачі оптимізації) уже забезпечує мінімум свого внеску в загальну \mathbf{T}_{zw} , тобто

$$\gamma_{m_2} = \min \|\mathbf{G}_c \mathbf{B}_1\|_2 + \min \|\mathbf{T}_{vw}\|_2. \quad (3.40)$$

Тому залишилося визначити умови мінімуму $\|\mathbf{T}_{vw}\|_2$. Для того щоб визначити передатну матрицю від \mathbf{w} до \mathbf{v} , запишемо для структури на рис. 3.9 зі штрихпунктиром систему рівнянь, уважаючи \mathbf{v} виходом (див. (3.3)):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}; \\ \mathbf{v} = -\mathbf{F}_2\mathbf{x} + \mathbf{u}; \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}; \\ \mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{y}. \end{cases} \quad (3.41)$$

Системі рівнянь (3.41), що описує все ту ж систему (рис. 3.9), відповідає об'єкт $\mathbf{G}_v(s)$:

$$\mathbf{G}_v(s) =: \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 & 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

відзначений у блоковій діаграмі (рис. 3.10), що спрощено представляє систему (рис. 3.9). Тому що \mathbf{G} (див. рис. 3.9 без штрихпунктиру) і \mathbf{G}_v (див. рис. 3.9 зі штрихпунктиром) мають однакову матрицю \mathbf{A} , то якщо \mathbf{K} стабілізує \mathbf{G}_v , то він стабілізує й \mathbf{G} . \mathbf{G}_v має форму, відповідну до проблеми оцінки виходу (ОЕ див. (3.34)), якщо виходом \mathbf{z} уважати змінну \mathbf{v} (зрівняй рис. 3.8 і рис. 3.10).

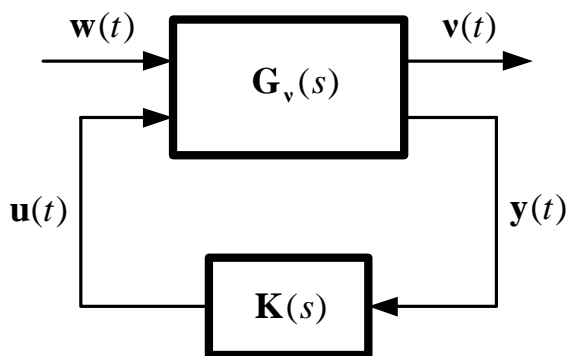


Рисунок 3.10 – Спрощене зображення системи рис. 3.9

Виходить, по-перше, $\min \|\mathbf{T}_{vw}\|_2$ для загальної проблеми = $\min \|\mathbf{T}_{zw}\|_2$ для проблеми ОЕ, і, згідно з результатом ОЕ.1, $\min \|\mathbf{T}_{vw}\|_2 = \|\mathbf{C}_1\mathbf{G}_f\|_2$, що (з урахуванням результату FI.2) перетворює співвідношення (3.40) в (3.17). І, по-друге, мінімум (3.17), згідно результату ОЕ.2, забезпечується єдиним регулятором

$$\mathbf{K}_{2_0}(s) =: \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2\mathbf{C}_1 + \mathbf{L}_2\mathbf{C}_2 & -\mathbf{L}_2 \\ \mathbf{C}_1 & 0 \end{bmatrix},$$

у якому, правда (див. початок цього розділу), потрібно (як і тільки що в (3.40)) замінити \mathbf{C}_1 на \mathbf{F}_2 , тобто регулятором (3.16), що й було потрібно показати.

Інтерпретація теореми 3.2 є логічним продовженням попередніх міркувань. Помітно, що множина усіх субоптимальних регуляторів, що забезпечують (див. (3.40) і ОЕ.3) $\|\mathbf{T}_{vw}\|_2^2 < \gamma^2 - \|\mathbf{G}_c \mathbf{B}_1\|_2^2$, суть регулятори $\mathbf{K}_2(s)$, параметризовані у вигляді схеми (рис. 7.3), у якій

$$\mathbf{M}_2(s) =: \left[\begin{array}{c|cc} \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_1 + \mathbf{L}_2 \mathbf{C}_2 & -\mathbf{L}_2 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{C}_2 & \mathbf{I} & 0 \end{array} \right], \quad (3.43)$$

а

$$\mathbf{Q} \in \mathbb{R}H^\infty, \quad \|\mathbf{Q}\|_2^2 < \left(\gamma^2 - \|\mathbf{G}_c \mathbf{B}_1\|_2^2 \right) - \|\mathbf{C}_1 \mathbf{G}_f\|_2^2. \quad (3.44)$$

Якщо при цьому згадати про необхідну оптимальність формувача керування (див. рис. 3.9 і результат F1.2), то в цьому регуляторі потрібно замінити \mathbf{C}_1 на \mathbf{F}_2 , у результаті чого (з обліком (3.13)) формулами (3.43) і (3.44) приймуть вид (3.18) і (3.19), що й було потрібно показати.

3.6 О структурі й властивості H^∞ -оптимального регулятора

3.6.1 Загальна інтерпретація проблеми з позиції принципу роздільності

У цьому розділі, як і для H^2 -випадку, загальна проблема оптимального зворотного зв'язку по вихідній змінній розглядається у вигляді комбінації проблеми повної інформації й проблеми оцінки виходу. Однак «розділена» структура H^∞ -регулятора має принципове ускладнення в порівнянні з H^2 -проблемою. Необхідні й достатні умови існування припустимого регулятора, такого що $\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty < \gamma$, визначається умовами теореми 3.3. Помітно, що умова 1) цієї теореми: $\mathbf{H}_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$ і $\mathbf{X}_\infty = \text{Ric}(\mathbf{H}_\infty) \geq 0$ відповідає результату F1.4 проблеми повної інформації, а її умова 2): $\mathbf{J}_\infty \in \text{dom}(\text{Ric})$ і $\mathbf{Y}_\infty = \text{Ric}(\mathbf{J}_\infty) \geq 0$ – результату FC.4 проблеми повного керування. Таким чином, вирішення проблем

FI і FC необхідно є присутнім у спільній задачі оптимального зворотного зв'язку по виходу, що й фіксує наступна лема сформульована в [43].

Лема 3.1. Якщо існує припустимий регулятор \mathbf{K} , що забезпечує $\|\mathbf{T}_{zw}\|_{\infty} < \gamma$ загальної задачі, то обов'язково розв'язувані спеціальні проблеми FI і FC і, як наслідок, дотримуються умови 1) і 2) теореми 3.3.

Доказ. Нехай \mathbf{K} – припустимий регулятор для об'єкта $\mathbf{G}(s)$ (3.2), що забезпечує $\|\mathbf{T}_{zw}\|_{\infty} < \gamma$. Покажемо, що існує регулятор, що вирішує проблему FI для об'єкта $\mathbf{G}_{FI}(s)$ (3.31). Для цього запишемо рівняння замкненої системи для об'єкта $\mathbf{G}(s)$ (див. (3.3)):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}, & \mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}; \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}; \\ \mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{y}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}; \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}; \\ \mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{K}\mathbf{D}_{21}\mathbf{w}, \end{cases}$$

і для об'єкта $\mathbf{G}_{FI}(s)$:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{FI} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{FI} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}; \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x}_{FI} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}; \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{FI} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{w}; \\ \mathbf{u} = \mathbf{K}_{FI}\mathbf{y}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{FI} = \mathbf{A}\mathbf{x}_{FI} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}; \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x}_{FI} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}; \\ \mathbf{u} = \mathbf{K}_{FI} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{FI} + \mathbf{K}_{FI} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{w}. \end{cases}$$

Порівнюючи отримані зображення вихідної й FI-системи, неважко помітити, що вони виявляться еквівалентними, якщо

$$\mathbf{K}\mathbf{C}_2 = \mathbf{K}_{FI} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ 0 \end{bmatrix}; \mathbf{K}\mathbf{D}_{21} = \mathbf{K}_{FI} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

звідки \mathbf{K}_{FI} легко може бути знайдений, а виходить, FI-проблема розв'язна, якщо існує \mathbf{K} , але тоді з FI.4 випливає умова 1) теореми 3.3. У силу дуальності проблем FI і FC аналогічним шляхом доводиться друга половина леми.

Для порівняння з H^2 -проблемою запишемо H^∞ -регулятор (3.24) – (3.28) у вигляді, подібному (3.36):

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_1\hat{\mathbf{w}}_{\text{worst}}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t) + \mathbf{Z}_\infty\mathbf{L}_\infty(\mathbf{C}_2\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{y}(t)); \\ \mathbf{u}(t) = \mathbf{F}_\infty\hat{\mathbf{x}}(t); \\ \hat{\mathbf{w}}_{\text{worst}}(t) = \gamma^{-2}\mathbf{B}_1^T\mathbf{X}_\infty\hat{\mathbf{x}}(t), \end{cases} \quad (3.45)$$

де $\hat{\mathbf{x}}(t)$ – ОЕ-оптимальна оцінка вектора $\mathbf{x}(t)$ (те, що тут фігурує саме ОЕ-оцінка (як і у випадку H^2 -проблеми), доведене в ході наступних викладень (див. 3.51) і далі)). Із цих рівнянь помітно, що на відміну від H^2 -спостерігача H^∞ -спостерігач має структуру спостерігача-компенсатора (через складову $\mathbf{B}_1\hat{\mathbf{w}}_{\text{worst}}(t)$). Основні відмінності в структурі регуляторів – це поява в H^∞ -випадку нової структурної складової $\mathbf{B}_1\hat{\mathbf{w}}_{\text{worst}}(t)$ й заміна \mathbf{L}_2 на $\mathbf{Z}_\infty\mathbf{L}_\infty$. Структурна схема, що відповідає (3.45), наведена в пунктирному прямокутнику на рис. 3.11.

3.6.2 Нові змінні спільної задачі H^∞ -оптимізації, їх властивості

Для інтерпретації теорем 3.3, 3.4 з позиції принципу роздільності буде потрібно ведення в розгляд двох нових змінних:

$$\mathbf{r} = \mathbf{w} - \gamma^{-2}\mathbf{B}_1^T\mathbf{X}_\infty\mathbf{x}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{B}_2^T\mathbf{X}_\infty\mathbf{x}, \quad (3.46)$$

виявлених на рис. 3.11 зі штрихпунктиром (якщо пригадати, що на ньому зображена оптимальна система, а) $(-\mathbf{B}_2^T\mathbf{X}_\infty)_{\text{opt}} = \mathbf{F}_\infty$ (див. (3.25))). Доцільність і зміст уведення \mathbf{v} й \mathbf{r} впливає з наступних перетворень.

Припустимо, що існує симетрична матриця $\mathbf{X}_\infty = \text{Ric}(\mathbf{H}_\infty)$, тоді можна диференціювати квадратичну форму $\mathbf{x}^T(t)\mathbf{X}_\infty\mathbf{x}(t)$, де $\mathbf{x}(t)$ – вектор стану оптимальної системи (3.43):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{x}^T\mathbf{X}_\infty\mathbf{x} &= \dot{\mathbf{x}}^T\mathbf{X}_\infty\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{X}_\infty\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T + \mathbf{w}^T\mathbf{B}_1^T + \mathbf{u}^T\mathbf{B}_2^T)\mathbf{X}_\infty\mathbf{x} + \\ &+ \mathbf{x}^T\mathbf{X}_\infty(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}) = \mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{X}_\infty + \mathbf{X}_\infty\mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{w}^T\mathbf{B}_1^T\mathbf{X}_\infty\mathbf{x} + \\ &+ \mathbf{x}^T\mathbf{X}_\infty\mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{u}^T\mathbf{B}_2^T\mathbf{X}_\infty\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{X}_\infty\mathbf{B}_2\mathbf{u} = \mathbf{x}^T(\mathbf{A}^T\mathbf{X}_\infty + \mathbf{X}_\infty\mathbf{A})\mathbf{x} + \\ &+ 2\langle \mathbf{w}, \mathbf{B}_1^T\mathbf{X}_\infty\mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{B}_2^T\mathbf{X}_\infty\mathbf{x} \rangle, \end{aligned}$$

де $\langle \cdot \rangle$ – скалярний добуток. З рівняння Риккати (3.22) маємо

$$\mathbf{A}^T \mathbf{X}_\infty + \mathbf{X}_\infty \mathbf{A} = -\mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 + \mathbf{X}_\infty \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_\infty - \gamma^{-2} \mathbf{X}_\infty \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty,$$

підставимо це вираження в попереднє, одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{x}^T \mathbf{X}_\infty \mathbf{x} &= -\mathbf{x}^T \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 \mathbf{X}_\infty \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{X}_\infty \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_\infty \mathbf{x} - \gamma^{-2} \mathbf{x}^T \mathbf{X}_\infty \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty \mathbf{x} + \\ &+ 2 \langle \mathbf{w}, \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty \mathbf{x} \rangle + 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_\infty \mathbf{x} \rangle = \\ &= -\|\mathbf{C}_1 \mathbf{x}\|^2 - \gamma^{-2} \|\mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty \mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_\infty \mathbf{x}\|^2 + \\ &+ 2 \langle \mathbf{w}, \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty \mathbf{x} \rangle + 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_\infty \mathbf{x} \rangle \end{aligned}$$

(тут $\|\mathbf{q}\|^2 = \mathbf{q}^T \mathbf{q}$ – квадрат евклідової норми вектора \mathbf{q}).

Використовуючи в цьому вираженні доповнення до повного квадрата, одержимо:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{x}^T \mathbf{X}_\infty \mathbf{x} &= -\|\mathbf{C}_1 \mathbf{x}\|^2 - \left(\gamma^{-2} \|\mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty \mathbf{x}\|^2 - 2 \langle \mathbf{w}, \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty \mathbf{x} \rangle + \|\mathbf{w}\|^2 \gamma^2 \right) + \\ &+ \|\mathbf{w}\|^2 \gamma^2 + \left(\|\mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_\infty \mathbf{x}\|^2 + 2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_\infty \mathbf{x} \rangle + \|\mathbf{u}\|^2 \right) - \|\mathbf{u}\|^2 = \\ &= -\left(\|\mathbf{C}_1 \mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 \right) + \gamma^2 \|\mathbf{w}\|^2 - \gamma^2 \|\mathbf{w} - \gamma^2 \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty \mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{u} + \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_\infty \mathbf{x}\|^2 \end{aligned}$$

Тому що в силу властивості в) стандартного об'єкта

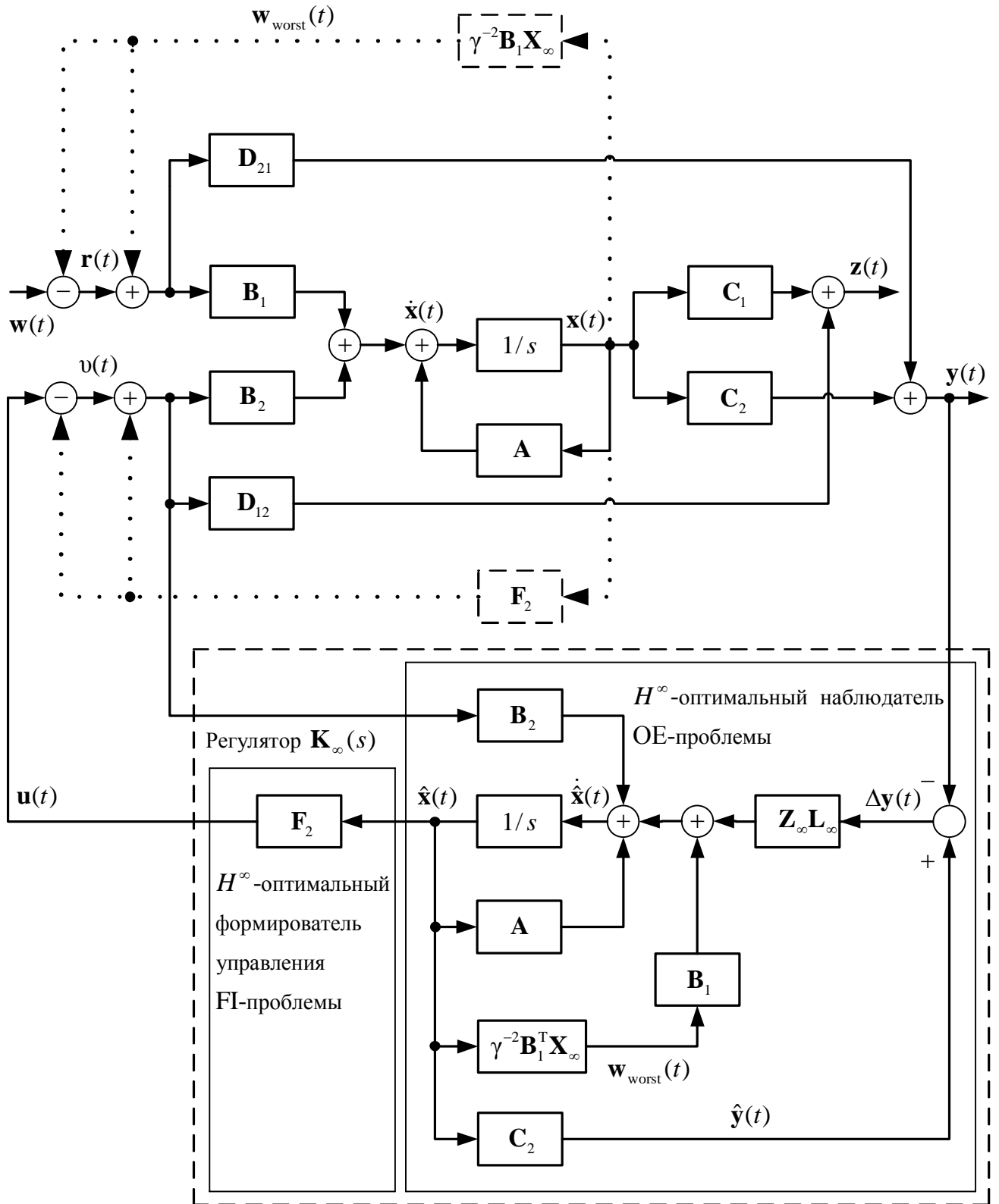
$$\begin{aligned} \|\mathbf{z}\|^2 &= \|\mathbf{C}_1 \mathbf{x} + \mathbf{D}_{12} \mathbf{u}\|^2 = \\ &= \|\mathbf{C}_1 \mathbf{x}\|^2 + 2 \langle \mathbf{C}_1 \mathbf{x}, \mathbf{D}_{12} \mathbf{u} \rangle + \|\mathbf{D}_{12} \mathbf{u}\|^2 = \\ &= \|\mathbf{C}_1 \mathbf{x}\|^2 + 0 + \mathbf{u}^T \mathbf{D}_{12}^T \mathbf{D}_{12} \mathbf{u} = \|\mathbf{C}_1 \mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{u}\|^2, \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}^T \mathbf{X}_\infty \mathbf{x} = -\|\mathbf{z}\|^2 + \gamma^2 \|\mathbf{w}\|^2 - \gamma^2 \|\mathbf{w} - \gamma^2 \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty \mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{u} + \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_\infty \mathbf{x}\|^2.$$

Нехай $\mathbf{x}(0) = 0$, і, оскільки система стійка, прийнявши, що $\mathbf{w}(t)$ діє не на нескінченному інтервалі, маємо $\mathbf{x}(\infty) = 0$. Якщо зінтегрувати отриману рівність по t від 0 до ∞ , маючи на увазі, що, згідно визначення 2-норми, тоді

$$\|\mathbf{q}\|_2^2 = \int_0^\infty \mathbf{q}^T \mathbf{q} dt = \int_0^\infty \|\mathbf{q}\|^2 dt,$$

приходимо до наступного (див. (3.46)):

Рисунок 3.11 – Система с H^∞ -припустимым регулятором

$$\|\mathbf{z}\|_2^2 - \gamma^2 \|\mathbf{w}\|_2^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_\infty \mathbf{x}\|_2^2 - \gamma^2 \|\mathbf{w} - \gamma^2 \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty \mathbf{x}\|_2^2 = \|\mathbf{v}\|_2^2 - \gamma^2 \|\mathbf{r}\|_2^2. \quad (3.47)$$

Зі співвідношення (3.47) можна встановити, по-перше, що $\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty < \gamma$, якщо $\|\mathbf{T}_{vr}\|_\infty < \gamma$. Дійсно, маючи на увазі фізичний зміст ∞ -норму МПФ (див. (1.17)) і рівність Парсеваля [43] маємо:

$$\sup_{\mathbf{w}: \|\mathbf{w}(s)\|_2 \leq 1} \left[\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty \|\mathbf{w}(s)\|_2^2 - \gamma^2 \|\mathbf{w}(s)\|_2^2 \right] = \sup_{\mathbf{r}: \|\mathbf{r}(s)\|_2 \leq 1} \left[\|\mathbf{T}_{vr}\|_\infty \|\mathbf{r}(s)\|_2^2 - \gamma^2 \|\mathbf{r}(s)\|_2^2 \right],$$

або

$$\sup_{\mathbf{w}: \|\mathbf{w}(s)\|_2 \leq 1} \left[\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty - \gamma^2 \right] \|\mathbf{w}(s)\|_2^2 = \sup_{\mathbf{r}: \|\mathbf{r}(s)\|_2 \leq 1} \left[\|\mathbf{T}_{vr}\|_\infty - \gamma^2 \right] \|\mathbf{r}(s)\|_2^2,$$

звідки виникає

$$\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty = \|\mathbf{T}_{vr}\|_\infty. \quad (3.48)$$

По-друге, помітимо, що розглянута задача H^∞ -оптимізації належить класу лінійно-квадратичних ігор [26] і полягає в мінімізації (по \mathbf{T}_{zw}) максимуму (по \mathbf{w}) (при значенню γ , яке задається) два-норми $\mathbf{z}(t)$. Співвідношення (3.47) має місце в оптимальній системі, тому одержання з нього вираження для норми $\mathbf{z}(t)$:

$$\|\mathbf{z}\|_2^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_\infty \mathbf{x}\|_2^2 - \gamma^2 \|\mathbf{w} - \gamma^{-2} \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty \mathbf{x}\|_2^2 + \gamma^2 \|\mathbf{w}\|_2^2$$

представляє її максимум по \mathbf{w} , і з останнього вираження помітно, що воно максимального (по \mathbf{w}), якщо мінімальний другий його член, який, як це безпосередньо помітно, є два-норма, – завжди ненегативна величина, тому мінімальне значення другого члена – нульове. І оскільки $\gamma \neq 0$, сигнал

$$\mathbf{w}(t) = \gamma^2 \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty \mathbf{x}(t) = \mathbf{w}_{\text{worst}}(t) \quad (3.49)$$

– найгірше для заданої γ (у тому розумінні, що дає найбільше по можливим \mathbf{w} значення мінімуму $\|\mathbf{z}\|_2^2$) збурювання (таким чином, нова змінна \mathbf{r} є відхилення поточного \mathbf{w} від найгіршого збурювання). Сигнал $\hat{\mathbf{w}}_{\text{worst}}(t)$ в (3.45) на рис. 3.11 є оцінка сигналу $\mathbf{w}_{\text{worst}}(t)$.

У третій, з обговорюваного вираження для норми \mathbf{z} помітно, що \mathbf{u} , мінімізаційна (по \mathbf{u}) значення $\|\mathbf{z}\|_2^2$, є

$$\mathbf{u}_{\text{opt}}(t) = -\mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_\infty \mathbf{x} = \mathbf{F}_\infty \mathbf{x} \quad (3.50)$$

(див. (3.25)), що також підтверджує сенс елементів структурної схеми H^∞ -регулятора (рис. 3.11) роз'ясняє сенс сигналів $\mathbf{v}(t)$ і $\mathbf{w}(t)$ в H^∞ і H^2 -регуляторах, зокрема, $\mathbf{u}_{\text{opt}}(t)$ і $\mathbf{w}_{\text{worst}}(t)$ – як оптимальні стратегії супротивників у відповідній проблемі лінійно-квадратичної гри [49].

При сигналах (3.49), (3.50) з вираження (3.47) маємо

$$\|\mathbf{z}\|_2^2 = \gamma^2 \|\mathbf{w}\|_2^2,$$

І оскільки цей випадок (див. (1.17)) відповідає

$$\|\mathbf{z}(s)\|_2^2 = \left\| \mathbf{T}_{\mathbf{z}\mathbf{w}_{\text{opt}}} \right\|_\infty^2 \|\mathbf{W}(s)\|_2^2$$

– оптимальному значенню квадрата два-норми \mathbf{z} , то γ^2 тут є

$$\gamma^2 = \left\| \mathbf{T}_{\mathbf{z}\mathbf{w}_{\text{opt}}} \right\|_\infty^2 = \gamma_{\text{m}\infty}^2.$$

Тепер перепишемо рівняння для об'єкта $\mathbf{G}(s)$ (3.2) через нові змінні й визначимо новий об'єкт $\mathbf{G}_t(s)$ із виходами $\mathbf{y}(s)$ й $\mathbf{v}(s)$:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{w} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}; \\ \mathbf{z} = \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{u}; \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{w}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1(\mathbf{r} + \gamma^{-2}\mathbf{B}_1^T\mathbf{X}_\infty\mathbf{x}) + \mathbf{B}_2\mathbf{u}; \\ \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{B}_2^T\mathbf{X}_\infty\mathbf{x}; \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}(\mathbf{r} + \gamma^{-2}\mathbf{B}_1^T\mathbf{X}_\infty\mathbf{x}), \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \gamma^{-2}\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^T\mathbf{X}_\infty)\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{r} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}; \\ \mathbf{v} = \mathbf{B}_2^T\mathbf{X}_\infty\mathbf{x} + \mathbf{u}; \\ \mathbf{y} = (\mathbf{C}_2 + \gamma^{-2}\mathbf{D}_{21}\mathbf{B}_1^T\mathbf{X}_\infty)\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{r}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_t\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{r} + \mathbf{B}_2\mathbf{u}; \\ \mathbf{v} = -\mathbf{F}_\infty\mathbf{x} + \mathbf{u}; \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{r}, \end{cases} \Rightarrow$$

(див. (3.25) і властивість γ) стандартного об'єкта). Звідси

$$\mathbf{G}_t(s) =: \begin{bmatrix} \mathbf{A}_t & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ -\mathbf{F}_\infty & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.51)$$

де

$$\mathbf{A}_t = \mathbf{A} + \gamma^{-2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty. \quad (3.52)$$

$\mathbf{G}_t(s)$ (– МПФ від $\begin{bmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}$ к) $\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$ являє собою об'єкт ОЕ-проблеми (див.

(3.34)) з обліком того, що $\mathbf{G}_t(s)$ перебуває в складі оптимальної системи (рис. 3.11). Слушна наступна лема сформульована в [43].

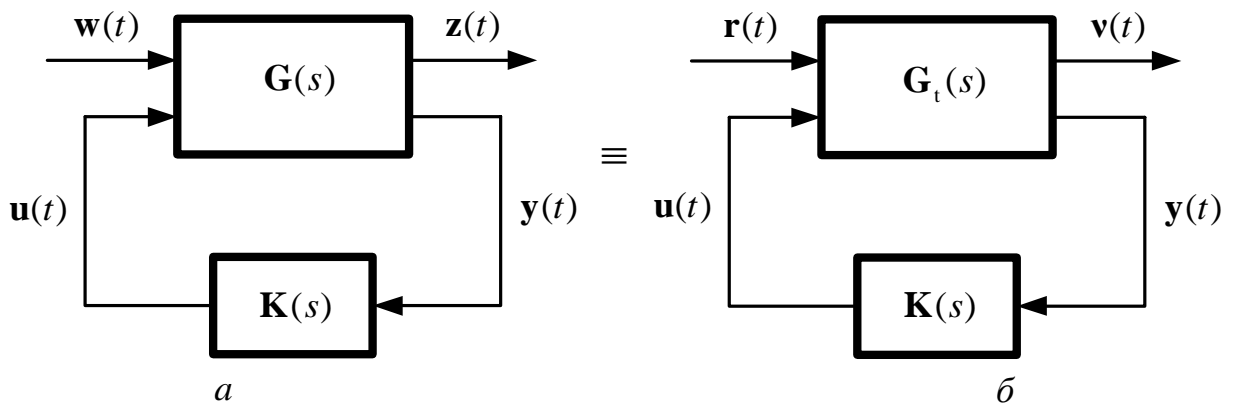


Рисунок 3.12 – Еквівалентні зображення системи рис. 3.11

Лема 3.3. Якщо \mathbf{X}_∞ існує й $\mathbf{X}_\infty \geq 0$, то регулятор \mathbf{K} є припустимим для $\mathbf{G}(s)$ й $\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty < \gamma$, якщо \mathbf{K} допустим для $\mathbf{G}_t(s)$ й $\|\mathbf{T}_{vr}\|_\infty < \gamma$.

Доказ цієї лєми в даній роботі не розглядається (його можна знайти [26]), однак те, що це так, легко випливає з (3.48). З лєми випливає еквівалентність структур *a* й *б*, представлених на рис. 3.13. Їхня еквівалентність, щоправда, випливає ще й безпосередньо з рис. 3.11, тому що рис. 3.11 без штрихпунктиру, а рис. 3.12б – проблеми на рис. 3.11 зі штрихпунктиром, а як це видно зі змісту штрихпунктирних включень, схеми (рис. 3.11) без штрихпунктиру і зі штрихпунктиром еквівалентні.

Матриця Гамільтона, відповідна до рівняння Риккаті проблеми фільтрації, для МПФ $\mathbf{G}_t(s)$ має вигляд

$$\mathbf{J}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_t^T & -\gamma^{-2} \mathbf{F}_\infty^T \mathbf{F}_\infty - \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_2 \\ -\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T & -\mathbf{A}_t \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

3.6.3 Інтерпретація теорем 3.3, 3.4 з позиції принципу роздільності

Теорема 3.3. Достатність. Допустимо, що дотримуються умови 1) – 3) у формулюванні теореми (див. лему 3.1). Покажемо, що матриця \mathbf{T} :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\gamma^{-2}\mathbf{X}_\infty \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

забезпечує перетворення подоби між \mathbf{J}_t (3.53) і \mathbf{J}_∞ (3.21), тобто що $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{J}_t\mathbf{T} = \mathbf{J}_\infty$. По формулі обігу блокової матриці [50] одержуємо:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \cdot (-\gamma^{-2}\mathbf{X}_\infty) \cdot (\mathbf{I})^{-1} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \gamma^{-2}\mathbf{X}_\infty \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^{-1}\mathbf{J}_t\mathbf{T} &= \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \gamma^{-2}\mathbf{X}_\infty \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_t^\top & -\gamma^{-2}\mathbf{F}_\infty^\top\mathbf{F}_\infty - \mathbf{C}_2^\top\mathbf{C}_2 \\ -\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^\top & -\mathbf{A}_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\gamma^{-2}\mathbf{X}_\infty \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_t^\top - \gamma^{-2}\mathbf{X}_\infty\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^\top & \gamma^{-2}\mathbf{F}_\infty^\top\mathbf{F}_\infty - \mathbf{C}_2^\top\mathbf{C}_2 - \gamma^{-2}\mathbf{X}_\infty\mathbf{A}_t \\ -\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^\top & -\mathbf{A}_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\gamma^{-2}\mathbf{X}_\infty \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_t^\top - \gamma^{-2}\mathbf{X}_\infty\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^\top & 0 \\ -\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^\top & 0 \end{bmatrix} + \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\gamma^{-2}\mathbf{A}_t^\top\mathbf{X}_\infty + \gamma^{-4}\mathbf{X}_\infty\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^\top\mathbf{X}_\infty + \gamma^{-2}\mathbf{F}_\infty^\top\mathbf{F}_\infty - \mathbf{C}_2^\top\mathbf{C}_2 - \gamma^{-2}\mathbf{X}_\infty\mathbf{A}_t \\ 0 & \gamma^{-2}\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^\top\mathbf{X}_\infty - \mathbf{A}_t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Розглянемо блоки отриманої матриці:

(11) – блок (див. (3.52)):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_t^\top - \gamma^{-2}\mathbf{X}_\infty\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^\top &= (\mathbf{A} + \gamma^{-2}\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^\top\mathbf{X}_\infty)^\top - \gamma^{-2}\mathbf{X}_\infty\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^\top = \\ &= \mathbf{A}^\top + \gamma^{-2}\mathbf{X}_\infty\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^\top - \gamma^{-2}\mathbf{X}_\infty\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^\top = \mathbf{A}^\top; \end{aligned}$$

(12) – блок (з урахуванням формул (3.52), (3.22) і (3.25)):

$$\begin{aligned}
& -\gamma^{-2} \mathbf{A}_t^T \mathbf{X}_\infty + \gamma^{-4} \mathbf{X}_\infty \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty + \gamma^{-2} \mathbf{F}_\infty^T \mathbf{F}_\infty - \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_2 - \gamma^{-2} \mathbf{X}_\infty \mathbf{A}_t = \\
& = -\gamma^{-2} \left[(\mathbf{A} + \gamma^{-2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty)^T \mathbf{X}_\infty + \mathbf{X}_\infty (\mathbf{A} + \gamma^{-2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty) - \right. \\
& \left. - \gamma^{-2} \mathbf{X}_\infty \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty - \mathbf{X}_\infty \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_\infty \right] - \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_2 = -\gamma^{-2} \left[\mathbf{A}^T \mathbf{X}_\infty + \mathbf{X}_\infty \mathbf{A} + \right. \\
& \left. + 2\gamma^{-2} \mathbf{X}_\infty \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty - \gamma^{-2} \mathbf{X}_\infty \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty - \mathbf{X}_\infty \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_\infty \right] - \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_2 = \\
& = -\gamma^{-2} \left[\mathbf{A}^T \mathbf{X}_\infty + \mathbf{X}_\infty \mathbf{A} - \mathbf{X}_\infty (\mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T - \gamma^{-2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T) \mathbf{X}_\infty + \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 \right] - \\
& - \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_2 = -\gamma^{-2} \left[\mathbf{A}^T \mathbf{X}_\infty + \mathbf{X}_\infty \mathbf{A} - \mathbf{X}_\infty (\mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T - \gamma^{-2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T) \mathbf{X}_\infty + \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 \right] + \\
& + \gamma^{-2} \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_2 = -\gamma^{-2} \cdot 0 + \gamma^{-2} \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_2 = \gamma^{-2} \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_2;
\end{aligned}$$

(22) – блок:

$$-\mathbf{A}_t + \gamma^{-2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty = -\mathbf{A} - \gamma^{-2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty + \gamma^{-2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty = -\mathbf{A}.$$

У такий спосіб:

$$\mathbf{T}^{-1} \mathbf{J}_t \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & \gamma^{-2} \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_2 \\ -\mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T & -\mathbf{A} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_\infty \text{ (див. (3.21))}$$

тобто \mathbf{T} (3.54) дійсно забезпечує перетворення подоби між \mathbf{J}_t і \mathbf{J}_∞ . Тоді спектральний підпростір, відповідне до власних чисел матриці \mathbf{J}_t з негативною ре-човинною частиною, має вигляд (див. (3.23)):

$$\begin{aligned}
\chi_\varepsilon(\mathbf{J}_t) &= \text{Im} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{Y}_t \end{bmatrix} = \chi_\varepsilon(\mathbf{J}_\infty) = \mathbf{T} \text{Im} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{Y}_\infty \end{bmatrix} = \\
&= \text{Im} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\gamma^{-2} \mathbf{X}_\infty \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{Y}_\infty \end{bmatrix} = \text{Im} \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \gamma^{-2} \mathbf{X}_\infty \mathbf{Y}_\infty \\ \mathbf{Y}_\infty \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

рішення рівняння Риккати, що відповідає матриці Гамільтона \mathbf{J}_t (3.53), має ви-гляд:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_t &= \text{Ric}(\mathbf{J}_t) = \mathbf{Y}_\infty (\mathbf{I} - \gamma^{-2} \mathbf{X}_\infty \mathbf{Y}_\infty)^{-1} = \\
&= \left[\mathbf{Y}_\infty (\mathbf{I} - \gamma^{-2} \mathbf{X}_\infty \mathbf{Y}_\infty)^{-1} \right]^T = (\mathbf{I} - \mathbf{Y}_\infty \mathbf{X}_\infty \gamma^{-2})^{-1} \mathbf{Y}_\infty = \mathbf{Z}_\infty \mathbf{Y}_\infty
\end{aligned} \tag{3.55}$$

(див. (3.27)). При виводі (3.55) використана властивість симетричності рішення рівняння Риккати. З умови 3) теореми ($\rho(\mathbf{X}_\infty \mathbf{Y}_\infty) < \gamma^{-2}$) випливає, що $\mathbf{Y}_t \geq 0$ [50]. Оскільки $\mathbf{G}_t(s)$ має вигляд об'єкта для проблеми оцінки виходу, причому, у си-лу умов 1) і 2) теореми, виконуються умови для ОЕ-проблеми (матриця

$\mathbf{A}_t + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}_\infty$ є стійкою по теоремі 3.3), то з пункту ОЕ.5 (з урахуванням оптимальності ще й формувача керування: $\mathbf{C}_1 = -\mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_\infty = \mathbf{F}_\infty$ (див. (3.25))) одержуємо центральний регулятор у вигляді

$$\mathbf{K}_{\infty 0t}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_t + \mathbf{L}_t \mathbf{C}_2 + \mathbf{B}_2 \mathbf{F}_\infty & \mathbf{L}_t \\ \hline \mathbf{F}_\infty & 0 \end{array} \right], \quad (3.56)$$

де $\mathbf{A}_t = \mathbf{A} + \gamma^{-2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T \mathbf{X}_\infty$ (див. (3.52)); $\mathbf{L}_t = -\mathbf{Y}_t \mathbf{C}_2^T = -\mathbf{Z}_\infty \mathbf{Y}_\infty \mathbf{C}_2^T = \mathbf{Z}_\infty \mathbf{L}_\infty$ (див. (3.26), (3.55)), а (3.56) переходить в (3.24), що й було потрібно показати.

Необхідність. Нехай \mathbf{K} – припустимий регулятор, такий що $\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty < \gamma$, тоді з леми 3.1 випливає умови 1) і 2) теореми. У силу леми 3.2 регулятор \mathbf{K} є припустимим для $\mathbf{G}_t(s)$ – і тоді дотримуються умови ОЕ-проблеми, а з ОЕ.4 випливає: $\mathbf{J}_t \in \text{dom}(\text{Ric})$, $\mathbf{Y}_t = \text{Ric}(\mathbf{J}_t) \geq 0$, і значить [50], повинно виконуватися $\rho(\mathbf{X}_\infty \mathbf{Y}_\infty) < \gamma^{-2}$ – умова 3) теореми, що й потрібно.

Теорема 3.4. З леми 3.2 випливає, що множина усіх припустимих регуляторів для $\mathbf{G}(s)$, таких що $\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty < \gamma$, дорівнює множині усіх припустимих регуляторів для $\mathbf{G}_t(s)$, таких що $\|\mathbf{T}_{vr}\|_\infty < \gamma$ [43]. Тоді, використовуючи пункт ОЕ.5 для $\mathbf{G}_t(s)$ (3.51) і вираження \mathbf{Y}_t з (3.55), одержуємо результат, що збігається з (3.29) [26].

Можна зробити висновок, що H^∞ -оптимальний спостерігач принципово відрізняється від H^2 -оптимального (див. структурні схеми (рис. 3.9 і 3.11)) наявністю зворотного зв'язку, що компенсує, для найгіршого $\mathbf{w}_{\text{worst}}(t)$ збурювання й відповідною зміною коефіцієнта підсилення оптимального спостерігача на $\mathbf{Z}_\infty \mathbf{L}_\infty$ замість \mathbf{L}_2 . Чим ближче вхідне збурювання до найгіршого, тим більше ефективно працює H^∞ -регулятор у порівнянні з H^2 -регулятором.

Теорема 3.3 дає необхідні й достатні умови для існування припустимого регулятора, такого що $\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty < \gamma$. Але ця теорема не дає явної формули для γ_{m_∞} , що є мінімумом $\|\mathbf{T}_{zw}\|_\infty$, через те що при оптимальному значенні $\gamma = \gamma_{m_\infty}$ форму-

ли теореми 3.3 стають «погано обумовленими», тому що матриця $(\mathbf{I} - \gamma^{-2} \mathbf{X}_\infty \mathbf{Y}_\infty)^{-1}$ необоротна [26], однак γ_{max} може бути обчислена з необхідною точністю за допомогою ітераційної процедури. Також корисно відзначити, що якщо $\gamma_2 \geq \gamma_1$, то $\mathbf{X}_\infty(\gamma_1) \geq \mathbf{X}_\infty(\gamma_2)$ й $\mathbf{Y}_\infty(\gamma_1) \geq \mathbf{Y}_\infty(\gamma_2)$. Таким чином, \mathbf{X}_∞ і \mathbf{Y}_∞ , а виходить, $\rho(\mathbf{X}_\infty \mathbf{Y}_\infty)$ є убутними функціями значення γ .

Зв'язок H^∞ - і H^2 -регуляторів добре проглядається, якщо у формулах для H^∞ -випадку покласти $\gamma \rightarrow \infty$. При цьому $\mathbf{X}_\infty \rightarrow \mathbf{X}_2$, $\mathbf{Y}_\infty \rightarrow \mathbf{Y}_2$, $\mathbf{H}_\infty \rightarrow \mathbf{H}_2$, $\mathbf{J}_\infty \rightarrow \mathbf{J}_2$ і $\mathbf{K}_\infty \rightarrow \mathbf{K}_2$, тобто H^2 -оптимальний регулятор можна розглядати в деякому сенсі як граничний випадок H^∞ -регулятора. Значення $\gamma = \infty$ відповідає тому факту, що H^∞ -норма замкненої системи не обмежена й, таким чином, зникає поняття «найгірше збурювання» (див. (3.49)).

3.7 Алгоритми синтезу H^∞ -і H^2 -оптимальних регуляторів

На закінчення даної глави приведемо алгоритми побудови H^∞ - і H^2 -регуляторів на основі отриманих результатів. Блок-схеми алгоритмів синтезу центральних H^∞ - і H^2 -оптимальних регуляторів зображені на рис. 3.13 і 3.14 відповідно.

Як уже говорилося, H^2 -оптимальний регулятор може бути побудований за кінцеве число операцій. Але при цьому необхідно зробити застереження, що в реальній програмі при рішенні алгебраїчного рівняння Риккати використовуються ітераційні процедури, тому це твердження вірне, якщо розглядати процедуру рішення рівняння Риккати як окрему операцію. Алгоритм синтезу H^2 -оптимального регулятора має лінійну структуру й ґрунтується на формулах (3.6) – (3.13).

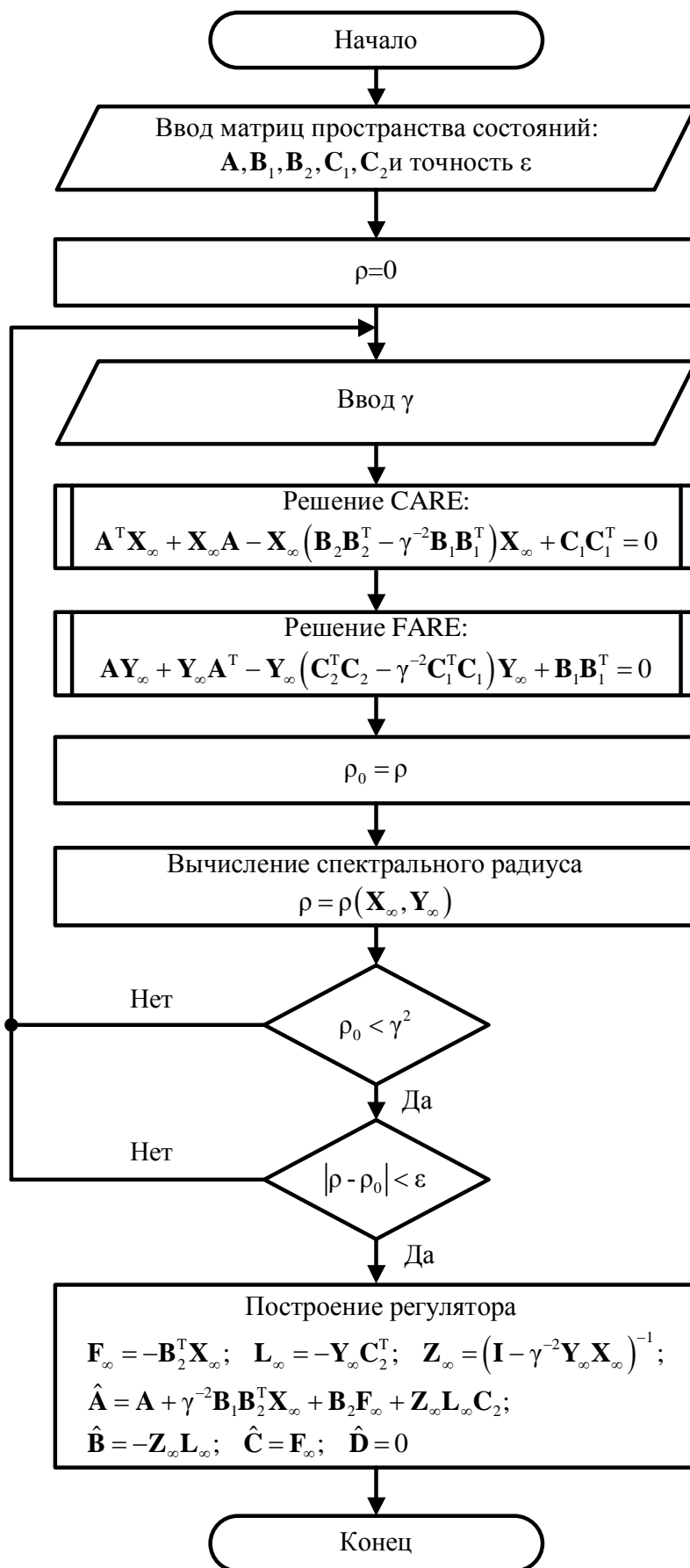


Рисунок 3.13 – Блок-схема алгоритму синтезу центрального H^∞ -оптимального регулятора

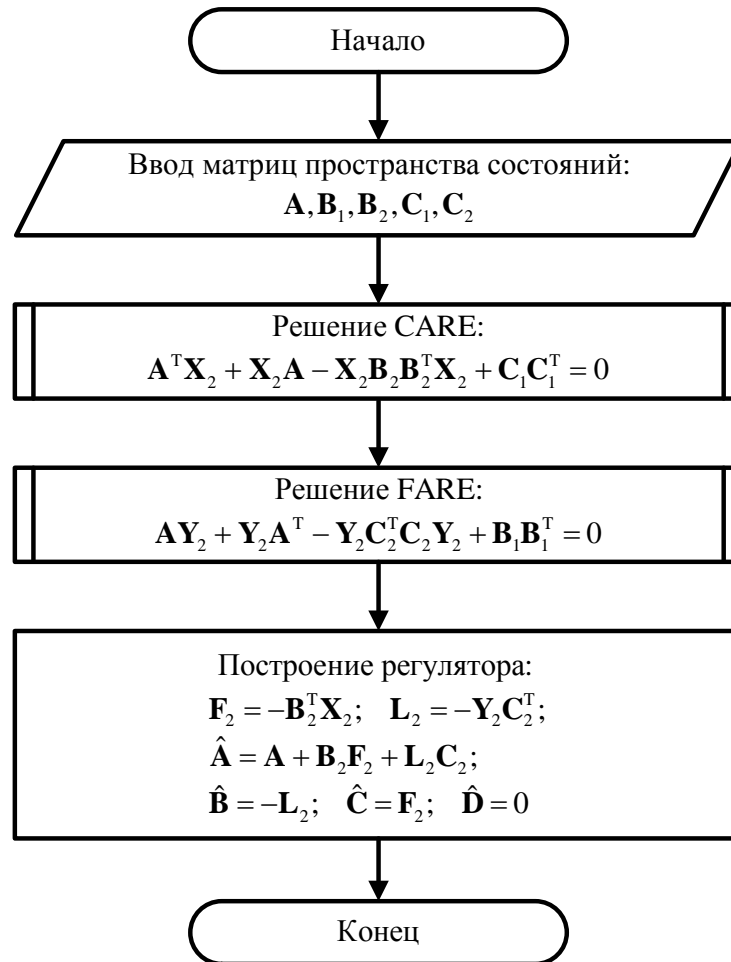


Рисунок 3.14 – Блок-схема алгоритму синтезу центрального H^2 -оптимального регулятора

На відміну від H^2 -випадку H^∞ -регулятор (як і H^∞ -норма) не може бути визначений кінцевим числом операцій і вимагає ітераційної процедури. Алгоритм синтезу H^∞ -регулятора має розгалужену структуру, це пояснюється необхідністю перевірки дотримання умови 3) теореми 3.3 – $\rho(\mathbf{X}_\infty \mathbf{Y}_\infty) < \gamma^2$ і необхідністю пошуку γ , із заданою точністю ε . (Іноді корисно перевіряти спектр матриць Гамільтона \mathbf{H}_∞ й \mathbf{J}_∞ на близькість до уявної осі, тобто виконання умов 1) і 2) теореми 3.3, але звичайна умова 3) порушується раніше умов 1) і 2) [26]). При недотриманні умови 3) необхідно ввести нове значення γ , більше попереднього; при недотриманні умови точності $|\rho - \rho_0| < \varepsilon$, де за ρ_0 позначений спектральний радіус при попередньому значенні γ й за ρ – при поточнім значенні,

необхідно ввести нове γ , менше попереднього. У даному алгоритмі реалізується введення γ на кожному кроці в режимі діалогу з користувачем, але можна реалізувати автоматичний вибір γ залежно від результатів перевірки умов, тоді необхідно задавати верхню й нижню границі γ . Побудова регулятора здійснюється вже при обраному значенні γ й відповідних йому матрицях \mathbf{X}_∞ і \mathbf{Y}_∞ . Помітно, що синтез H^∞ -регулятора набагато більш трудомісткий, ніж синтез H^2 -регулятора ще й тому, що необхідно розв'язувати два рівняння Риккати в кожному циклі вибору γ , а для H^2 -випадку ці рівняння тільки один раз.