**Реферат**

Магістерська дисертація містить:

72 сторінок, 13 малюнків, 12 джерел

Ключові слова: нелінійна оптика, рівняння Максвелла, сферична хвиля, когерентність, дифракція, монохроматичність випромінювання, лазер, фаза, хвилевід, квазіоптичного рівняння, самофокусування випромінювання.

В роботі розглянуті нелінійні ефекти при поширенні хвиль в диспергуючих середовищах, механізми оптичної нелінійності, електромагнітні процеси в нелінійному середовищі. Методом обчислювального експерименту досліджено явище самофокусіровкі світла, пов'язане зі зміною показника заломлення середовища під дією потужної світлової хвилі. Обчислювальний експеримент був виконаний на основі чисельного розв'язку нелінійного рівняння Шредінгера в радіально-симетричному випадку.

**Abstract**

The Master's thesis contains: 72 pages, 13 figures, 12 sources.

Keywords: nonlinear optics, Maxwell's equations, spherical wave, coherence, diffraction, monochromatic radiation, laser, phase, waveguide, quasi-optical equation, self-focusing of radiation.

The paper deals with nonlinear effects in the propagation of waves in dispersing media, the mechanisms of optical nonlinearity, electromagnetic processes in a nonlinear medium. The phenomenon of self-focusing of light associated with the change of the refractive index of the medium under the action of a powerful light wave is investigated by the method of a computational experiment. The computational experiment was performed on the basis of the numerical solution of the nonlinear schrödinger equation in the radially symmetric case.

**Реферат**

Магистерская диссертация содержит:

72 страниц, 13 рисунков, 12 источников

Ключевые слова: нелинейная оптика, уравнения Максвелла, сферическая волна, когерентность, дифракция, монохроматичное излучение, лазер, фаза, волновод, квазиоптическое уравнение, самофокусировка излучения.

В работе рассмотрены нелинейные эффекты при распространении волн в диспергирующих средах, механизмы оптической нелинейности, электромагнитные процессы в нелинейной среде. Методом вычислительного эксперимента исследовано явление самофокусировки света, связанное с изменением показателя преломления среды под действием мощной световой волны. Вычислительный эксперимент был выполнен на основе численного решения нелинейного уравнения Шредингера в радиально-симметричном случае.

**ЗМІСТ**

[ВСТУП. 6](#_Toc516807360)

[Розділ 1.НЕЛІНІЙНА ПОЛЯРИЗАЦІЯ. 8](#_Toc516807361)

[1.1. Нелінійні ефекти при поширенні хвиль в диспергуючих середовищах. 8](#_Toc516807362)

[1.1.1.Предмет нелінійної оптики. 8](#_Toc516807363)

[1.1.2.Классіфікація нелінійно-оптичних ефектів. 11](#_Toc516807364)

[1.1.3.Нелінійна поляризація. 14](#_Toc516807365)

[1.2. Механізми оптичної нелінійності. 19](#_Toc516807366)

[1.2.1. Експеримент Франкена. Фізичні причини нелінійності. 19](#_Toc516807367)

[1.2.2.Теплова нелінійність. 21](#_Toc516807368)

[1.2.3. Ефекти електрострикції. 22](#_Toc516807369)

[1.2.4. Орієнтаційна, керрівська нелінійність. 23](#_Toc516807370)

[1.2.5.Електронна нелінійність. 24](#_Toc516807371)

[1.3. Електромагнітні процеси в нелінійному середовищі. 27](#_Toc516807372)

[1.3.1. Рівняння Максвелла. Хвильове рівняння. 27](#_Toc516807373)

[1.3.2. Поляризація діелектриків в постійному електричному полі у випадку дипольного газу. 32](#_Toc516807374)

[1.3.3. Поляризація діелектриків в постійному електричному полі у випадкуразі газу, атоми якого не володіють дипольним моментом. 34](#_Toc516807375)

[1.4. Система пов'язаних хвильових рівнянь в нелінійному середовищі. 39](#_Toc516807376)

[1.4.1. Рівняння Максвелла. 39](#_Toc516807377)

[1.4.2. Рівняння електромагнітних хвиль в нелінійному середовищі. 40](#_Toc516807378)

[1.4.3. Укорочені рівняння для амплітуд пов'язаних хвиль в ізотропному нелінійному середовищі. 42](#_Toc516807379)

[Розділ 2. НЕЛІНІЙНІ ОПТИЧНІ ЕФЕКТИ. 44](#_Toc516807380)

[2.1. Генерація другої гармоніки. 44](#_Toc516807381)

[2.1.1.Генерація другої гармоніки на основі інтегрального підходу. 44](#_Toc516807382)

[2.1.2.Довжина когерентності. 46](#_Toc516807383)

[2.1.3.Фазовий синхронізм і методи його реалізації. 47](#_Toc516807384)

[2.1.4.Віди фазового синхронізму. 49](#_Toc516807385)

[2.2. Нелінійний показник заломлення 51](#_Toc516807386)

[2.2.1. Механізми виникнення нелінійності третього порядку. 51](#_Toc516807387)

[2.2.2. Теплова нелінійність 54](#_Toc516807388)

[2.2.3. Великомасштабне самофокусування 55](#_Toc516807389)

[Розділ 3.САМОВПЛИВ СВІТЛОВИХ ХВИЛЬ. 59](#_Toc516807390)

[3.1.Самофокусування випромінювання в нелінійному середовищі. 59](#_Toc516807391)

[3.1.1. Нелінійне квазіоптичне рівняння. 59](#_Toc516807392)

[3.1.2.Ейкональне наближення для квазіоптичного рівняння. 60](#_Toc516807393)

[3.1.3.Самофокусування параболічних пучків. 61](#_Toc516807394)

[3.1.4. Вплив дифракції на самофокусування випромінювання. 64](#_Toc516807395)

[3.2. Чисельне моделювання ефекту савмовпливу пучка лазера 65](#_Toc516807396)

[3.2.1 Чисельне рішення нелінійного рівняння Шредінгера в радіально-симетричному випадку. 65](#_Toc516807397)

[3.2.2. Самофокусування пучка 67](#_Toc516807398)

[3.2.3. Самодефокусування пучка 69](#_Toc516807399)

[ВИСНОВКИ 71](#_Toc516807400)

[Список використаної літератури 72](#_Toc516807401)

# ВСТУП.

***Актуальність теми.*** Одним з яскравих прикладів нелінійних некогерентних ефектів є самофокусування світла. Ефект полягає в тому, що в полі потужного лазерного пучка середа набуває фокусуючі (лінзові) властивості. В результаті світловий пучок «схлопуеться», перетворюючись в тонку нитка, що світиться, або розпадається на кілька таких ниток. Механізм самофокусування пов'язаний зі зміною показника заломлення середовища під дією потужної світловий хвилі. Поведінка пучка в нелінійному середовищі визначається не інтенсивністю, а потужністю: якщо потужність менше критичної, то дифракція сильніше самофокусування, і пучок розходиться. Навпаки, якщо, То пучок лавиноподібно «схлопується» до осі, поки інтенсивність в його центрі не перевищить поріг руйнування оптичного середовища або поріг вимушеного розсіювання. Якщо ж потужність дорівнює критичній, то діаметр пучка залишається незмінним - відбувається самоканалізація випромінювання.

Зовнішнє самофокусування часто використовується для пасивної синхронізації мод лазерів з ультракороткою тривалістю імпульсу. Ще одне застосування нелінійної рефракції - оптичне обмеження потужності лазерного випромінювання для захисту будь-якого чутливого елемента (наприклад, фотодетектора) від перевищення максимально допустимої потужності падаючого на нього випромінювання).

**Мета роботи** полягає в чисельному моделюванні самовпливу лазерного пучка на прикладі чисельного рішення нелінійного рівняння Шредінгера в радіально-симетричному випадку.

**Завдання дослідження**. Для досягнення поставленої мети необхідно було виконати такі завдання:

- Розглянути явище нелінійної поляризації, механізми оптичної нелінійності, електромагнітні процеси в нелінійнму середовищі, питання поляризації діелектрика;

- Розглянути нелінійні оптичні ефекти, пов'язані з нелінійністю другого порядку;

- Розглянути механізми нелінійності третього порядку і ефекти, пов'язані з цією нелінійністю;

- Розглянути самофокування випромінювання в нелінійнму середовищі на прикладі параболічних пучків;

- Розглянути вплив дифракції на самофокусування випромінювання.

- Провести моделювання самовпливу лазерного пучка із застосуванням чисельного рішення нелінійного рівняння Шредінгера в радіально-симетричному випадку.

-Проаналізувати результати чисельного моделювання самофокусування і самодефокусування пучка.

**Об'єкт дослідження** - самовплив лазерного випромінювання.

**Предмет дослідження** - Чисельне моделювання самовпливу лазерного пучка.

**Методи дослідження.** Для вирішення поставлених завдань і отримання основних результатів використовувалися методи чисельного розрахунку за допомогою систем комп'ютерної математики.

**Новизна отриманих результатів** полягає в розробці методики розрахунку самофокусування (і самодефокусування) лазерного випромінювання.

**Практична цінність** отриманих результатів полягає в тому, що результати роботи можуть бути використані для аналізу і розрахунку параметрів самофокусування лазерного випромінювання.

**Структура і обсяг роботи**. Магістерська дисертація складається з вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Загальний обсяг роботи 72 сторінки. Робота містить 12 малюнків, список використаних джерел з 12 найменувань на 1 сторінці.

# Розділ 1.НЕЛІНІЙНА ПОЛЯРИЗАЦІЯ.

## 1.1. Нелінійні ефекти при поширенні хвиль в диспергуючих середовищах.

### 1.1.1.Предмет нелінійної оптики.

Коли говорять про поширення світла в речовині, передбачається, що характеристики середовища не змінюються під його впливом. З цього випливає, зокрема, принцип суперпозиції, що дозволяє розглядати будь-яке хвильове поле як суму полів (компонент) більш простої просторової конфігурації (наприклад, у вигляді плоских монохроматичних хвиль). При цьому кожна з компонент може розглядатися незалежно від інших. Фізичною причиною, що обґрунтовує принцип суперпозиції, є наступне. Електричні поля в атомах і молекулах, які є основними визначниками структури і оптичних властивостей елементами їх конструкції, великі. Існуючі в долазерну епоху джерела світла навіть з використанням всіх мислимих оптичних систем могли забезпечити електричні поля в світловий електромагнітній хвилі на багато порядків менше, ніж внутріатомні. Це означає, що вплив електромагнітного поля хвилі на властивості середовища дуже малий і не виявлявся в реальних умовах. Відгук середовища на зовнішнє оптичне впливання в цьому випадку пропорційний (линійний) величині електричного поля в хвилі і принцип лінійної суперпозиції виконується. Тому систему теоретичного опису таких явищ, що виникають при взаємодії світла з речовиною, називають лінійної оптикою. Відкриття принципу квантового посилення і створення на цій базі оптичних квантових генераторів (лазерів) дозволило генерувати оптичні поля з напруженістю, порівнянної з напруженістю внутріатомної поля. Вплив такого оптичного випромінювання на середу призводить до зміни її оптичних властивостей. Це означає, що хвиля в середовищі відчуває як самовплив, так і може впливати на процеси поширення в середовищі інших хвиль (і не тільки електромагнітних). Природно, в цьому випадку принцип суперпозиції вже не працює, що веде до виникнення нових, що не спостерігалися раніше явищ і вимагає розвитку нових теоретичних підходів. Це область вже нової науки, званої нелінійної оптикою. Термін «нелінійна оптика» вперше був введений російським вченим С. І. Вавілов в 1925 р, якому вдалося спостерігати зменшення поглинання світлоурановими стеклами при проходженні через них оптичного випромінювання з високою інтенсивністю. З початку 60-х років цього ж століття, після створення лазерів, нелінійно-оптичні явища стали доступні не тільки спостереження, а й перетворилися в серйозний інструмент вивчення речовини, стали основою для створення абсолютно нових пристроїв лазерної техніки.

Таким чином, предметом нелінійної оптики є процеси взаємодії світла і речовини, характер протікання яких залежить від його інтенсивності. До таких процесів відносяться явища резонансного просвітління середовища, двухфотонного або багатофотонного поглинання світла, оптичний пробій середовища генерація оптичних гармонік, «випрямлення» світла, вимушене розсіювання світла, самофокусування світлових пучків, самомодуляція імпульсів і ряд інших ефектів, що проявляються в полях лазерного випромінювання.

***Історія розвитку*** *нелінійної оптики*. Типові ефекти нелінійної оптики, тобто такі, в яких беруть участь лише поля з оптичними частотами, були відкриті тільки після створення лазерів.

Необхідно відзначити, однак, що і до створення квантових генераторів світла спостерігалися окремі нелінійні ефекти в оптиці. До їх числа належить, наприклад, комбінаційне розсіювання, яке спостерігалося Ч. Раманом.і К. Кріснаном в рідинах і Л. І. Мандельштамом і Г. С. Ландсбергом в твердих тілах.

С. І. Вавилов протягом ряду років здійснював пошуки нових нелінійних оптичних явищ. Він писав у книзі «Мікроструктура світла»: нелінійність в поглинає середовищі пов'язана з дисперсією, тому швидкість поширення світла в середовищі, взагалі кажучи, також повинна залежати від світлової потужності. З цієї ж причини в загальному випадку повинна спостерігатися залежність від світлової потужності, тобто порушення принципу суперпозиції, і в інших оптичних властивостях середовища - в подвійному променезаломлення, дихроізмім обертальної здатності і т.д.

Після основоположних робіт Г. Г. Басова, А. М. Прохорова і Ц. Таунса були створені твердотільні лазери і газові (Не-Ne), які потім постійно вдосконалювалися і доповнювалися лазерами різних типів. Завдяки цим роботам у даний час існують інтенсивні когерентні джерела, частоти яких охоплюють широкий діапазон від УФ до далекої ІЧ області. Досягаються при цьому потужності від 10-1 до 103 Вт. Значно вищі потужності досягаються в імпульсному режимі, особливо при модуляції добротності. Рубіновий або неодимовий лазер з перемикається добротністю (λ ~ 0,65 і 1,06 мкм) може, наприклад, випромінювати імпульси тривалістю 10-9 з потужністю, що досягає 108 Вт.

Для нелінійних ефектів важливі не самі потужності, а потужності на одиницю площі, тобто інтенсивності, оскільки вони саме визначають напруженість поля. Тому важливу роль відіграє таку властивість лазерного випромінювання, як мала розбіжність світлового пучка. Воно дозволяє сконцентрувати випромінювання на дуже малій поверхні і тим самим створити дуже високі напруженості поля.

У 1961 р Франкен із співробітниками відкрили ефект, в якому брали участь тільки хвилі оптичних частот. В цьому експерименті світло від рубінового лазера (довжина хвилі 0,694 мкм) падав на кристал кварцу, а позаду кристала спостерігався світло подвоєною частоти, вимірювання з відповідними комбінаціями фільтрів дозволили довести, що цей світ дійсно виникав в кристалі. Тобто була отримана друга гармоніка.

Потім були відкриті інші цікаві явища:

* Двухфотонне поглинання (1961 г.)
* Фотонне відлуння і самоіндуцирована прозорість (1964 г.)
* Здобуття третьї гармонії (1963 г.)
* Отримання випромінювання на сумарних і різницевих частотах (1962 р)
* Оптичне випрямлення (1962 р)
* Параметричні коливання і посилення (1963 г.)
* Вимушене комбінаційне розсіяння (1962 р)
* Вимушене бріллюенівске розсіювання (1963 г.)
* Вимушене ремевске розсіювання (1963 г.)
* Самофокусування (1964 г.)
* Оптичний ефект Керра (1964 г.)

В даний час можна вказати принаймні чотири великих напрямки нелінійної оптики, в яких отримані важливі фундаментальні та прикладні результати, де і до цього дня зберігається високий тонус досліджень і розробок.

* Фізика оптичної нелінійності і нелінійна спектроскопія.
* Хвильова нелінійна оптика.
* Фізика впливу сильного світлового поля на речовину.
* Прикладна нелінійна оптика.

### 1.1.2.Классіфікація нелінійно-оптичних ефектів.

Такі оптичні характеристики середовища, як показник заломлення і коефіцієнт поглинання, що не залежать від інтенсивності світла, якщо реакція середовища на електричне поле світлової хвилі описується лінійним матеріальним рівнянням , Т. Е. Поляризованість пропорційна напруженості поля, а коефіцієнт пропорційності - сприйнятливість - залежить тільки від властивостей середовища. Але це матеріальне рівняння справедливо лише при напруженості Е електричного поля світлової хвилі, малих порівняно з напруженнями внутрішньоатомних електричних полів () В / см. У пучках світла від не лазерних джерел досяжні значення напруженості поля не перевищують 0,1-10 В / см і лінійне матеріальне рівняння виконується з великою точністю. Однак в інтенсивних лазерних пучках напруженість Е поля досягаєВ / см. У таких полях модель гармонічного осцилятора для опису поведінки оптичного електрона атома вже непридатна і зв'язок поляризованості середовища з напруженістю поля світлової хвилі стає нелінійної. В результаті виникає залежність оптичних характеристик середовища від інтенсивності випромінювання, яка призводить не до яких-небудь малих поправок, а до принципово нових ефектів, якогї взагалі немає у лінійної оптики. Перший нелінійний ефект був відкритий С. І. Вавіловим і В. Л. Левшиним ще в 1925 р Незважаючи на труднощі дослідів з не лазерними джерелами їм вдалося спостерігати невелике зменшення (до 1,5%) коефіцієнта поглинання уранового скла зі збільшенням інтенсивності світла. Виникнення цього нелінійного ефекту насичення обумовлено вирівнюванням заселеності двох рівнів енергії, між якими відбуваються квантові переходи з поглинанням і випусканням світла. Зменшення частки поглинання потужності зі збільшенням інтенсивності світла, т. е. просвітлення нелінійно поглинаючого середовища при проходженні сильних світлових пучків, знайшло застосування в лазерній техніці, де воно використовується для модуляції добротності оптичних резонаторів з метою генерації надкоротких потужних імпульсів. Осередок з нелінійно поглинаючим середовищем являє собою автоматичний затвор, що відкривається під впливом потужного світлового пучка. Такий затвор має малу інерційність, так як після проходження потужного світлового імпульсу середовище швидко стає знову непрозороим для слабкого світла.

В активному середовищі з інверсією заселеність ефект насичення призводить до зменшення коефіцієнта посилення при збільшенні інтенсивності світла і тим самим до встановлення стаціонарного режиму генерації в лазерах. Якщо непрозоре для слабкого світла середовище за рахунок ефекту насичення стає прозорим в сильних світлових пучках, то прямо протилежна ситуація спостерігається в області оптичної прозорості середовища. Тут в результаті багатофотонного поглинання інтенсивне світло може поглинатися набагато сильніше, ніж слабке. При великій щільності випромінювання система з рівнями енергії  може поглинути в елементарному акті два фотона з частотами  і , Такими, що (В окремому випадку ). Можливо також одночасне поглинання трьох фотонів і більше. Многофотонне поглинання знаходить застосування в нелінійній лазерній спектроскопії і дозволяє отримувати інформацію про енергетичні рівні квантових систем.

До нелінійних некогерентних ефектів поглинання примикає і багатофотонний фотоефект. В експериментах з фокусуємими лазерними пучками досягаються такі високі інтенсивності світлового поля, що стають доступними спостереженню процеси, в яких атом поглинає вісім і більше фотонів. В результаті може статися фотоіонизація атома світлом малої частоти, т.ч. В інтенсивних світлових полях зникає червона межа фотоефекту.

Одним з яскравих прикладів нелінійних некогерентних ефектів є **самофокусування** світла. Ефект полягає в тому, що в полі потужного лазерного пучка середа набуває фокусні (лінзові) властивості. В результаті світловий пучок «схлопується», перетворюючись в тонку світитячуся нитку, або розпадається на кілька таких ниток. Механізм самофокусування пов'язаний зі зміною показника заломлення середовища під дією потужної світловий хвилі. Причини цього можуть бути різними. Наприклад, електрострикція в світловому полі призводить до появи тиску, що змінює щільність середовища в області, зайнятої світловим пучком, а, отже, і показник заломлення середовища. У рідині сильне світлове поле призводить до орієнтації анізотропно поляризуючихся молекул за рахунок взаємодії світла з наведеним дипольним моментом, при цьому середовище стає анізотропним, а середній показник заломлення для орієнтації поля зростає Залежна від інтенсивності світлової хвилі добавка до показника заломлення може бути пов'язана також з нелінійністю електронної поляризації. Нарешті, зміна щільності, а, отже, і показника заломлення може бути пов'язана з нагріванням середовища, викликаним диссипацією енергії потужної світловий хвилі.

Самофокусування світла було теоретично передбачене Аскарьяном в 1962 р, а експериментально вперше спостерігалося в Пилипецької і Рустамова в 1965 р в їх дослідах були фотографічно зареєстровані вузькі світлові нитки в органічних рідинах, що опромінюються сфокусованим пучком рубінового лазера.

Зворотним по відношенню до самофокусування є ефект самодефокусування. Під дією потужного лазерного випромінювання в середовищі з'являється нелінійна добавка до показника поглинання. У тому випадку якщо лимонна кислота позитивна, відбувається самофокусування (формується нелінійна позитивна квазілінза). При негативній добавці показник заломлення на осі пучка зменшується і формується нелінійна негативна квазілінза, що призводить до самодефокусування.

Ті ж самі механізми обумовлюють і інший ефект нелінійного самовпливу світла - самомодуляцію світлового імпульсу. Даний ефект використовується в системах генерації фемтосекундних лазерних імпульсів.

Отже, головною особливістю некогерентних нелінійно-оптичних ефектів є їх незалежність від фази лазерного випромінювання. Очевидно, що крім великої інтенсивності лазерне випромінювання відрізняється високим ступенем когерентності. Останнє проявляється в нелінійно оптичні ефекти, в яких фазові співвідношення відіграють визначальну роль

### 1.1.3.Нелінійна поляризація.

Електричне поле, прикладене до діелектричного середовища, призводить до зміщення електронів і ядер (іонів) атомів і молекул зі свого первісного положення, яке вони займали до накладення поля. У середовищі утворюються індуковані електричні дипольні моменти - середа поляризується. Дипольний момент одиниці об'єму речовини називається вектором поляризації.

Електричне поле світлової хвилі, що розповсюджується в речовині, призводить до зміщення тільки електронів, тоді як більш масивні ядра або іони не встигають зміститися за час одного періоду коливання поля і практично залишаються на своїх місцях; виникає лише електронна поляризація. Це має місце, якщо частота хвилі порядку 10151014 Гц, що відповідає ультрафіолетового, мабуть і найближчого інфрачервоному діапазону довжин хвиль (наприклад, від 0,1 до 3 мкм). Якщо ж частота електромагнітної хвилі порядку 10131011 Гц, що відповідає інфрачервоному діапазону (довжина хвилі, наприклад, 10 мкм і більше), то і іони змушені зміщуватися слідом за полем хвилі, утворюючи дипольний момент, і починає вносити помітний вклад іонна поляризація (її називають іноді атомної поляризацією). Електронна і іонна поляризації, що виникають за рахунок зміщення зарядів, утворюють деформаційних частина поляризації.



Для ще більш низьких частот електромагнітних хвиль, порядку 1010 Гц і нижче, що відповідає радіодіапазоні (наприклад, 3 см і більше), починає грати роль орієнтаційна поляризація, що утворюється за рахунок орієнтації власних дипольних моментів полярних молекул.

Виникаючі під дією поля електромагнітної хвилі індуковані дипольні моменти коливаються з частотою поля, утворюючи осцилятори, які, в свою чергу, випромінюють вторинні хвилі з тією ж самою частотою, утворюючи перевипромінену хвилю, когерентну з вихідною.

Світлові хвилі, одержані за допомогою звичайних теплових і газорозрядних джерел, мають дуже малі (в порівнянні з напруженістю внутрішнього поля в речовині) напруженості Е поля приблизно 102103 В / м і лише незначно зміщують електрони на малу величину r, яку можна вважати пропорційною полю. Під дією поля Е атом або молекула перетворюються в гармонійний осцилятор з дипольним моментом, Який здійснює вимушені коливання з частотою поля світлової хвилі (е - заряд електрона, - поляризованість атома або молекули).



В результаті в речовині утворюється лінійна поляризація

 (1.1)

Тут *N1* - число молекул в одиниці об'єму, - лінійна сприйнятливість середовища. Так як поле *Е* є поле світлової хвилі з частотою, то і *Р* коливається з тією ж частотою.

Лазери дозволяють отримувати світлові поля дуже великої напруженості порядку 107108 В / м (потужності порядку 102104 МВт / см2). Ці поля зміщують електрони вже на набагато більші величини r, перетворюючи атом або молекулу в ангармонічний осцилятор. При цьому здатність до поляризації починає сама залежати від величини поля Е, і її можна представити у вигляді ряду



 (1.2)

Поляризація *Р* поряд з лінійним числом *аЕ* містить ряд нелінійних членів:

 (1.3)

Вираз для поляризації у вигляді ряду (1.3) можна було б отримати і безпосередньо, розкладаючи функцію *Р (Е)* в статистичний ряд:

 (1.4)

а так як при *Е = 0 Р (0) = 0*, то знову отримуємо (1.3), де

 (1.5)

Надалі обмежимося розглядом тільки двох нелінійних членів в вираженні поляризації і будемо представляти її у вигляді

. (1.6)

В такому ж вигляді вона описує нелінійні оптичні ефекти, які носять назву нелінійних ефектів другого порядку (ефекти, пов'язані з членом ) І нелінійних ефектів третього порядку (ефекти, зумовлені членом ). Середовища, в яких спостерігаються ефекти другого порядку, називають квадратичними, а середовища, в яких спостерігаються ефекти третього порядку, - кубічний.

При зазвичай використовуваних напруженостях лазерного поля Е для членів ряду (1.6) має місце співвідношення

 (1.7)

т. е. нелінійні члени вищого порядку по полю Е одночасно є членами все більш високого порядку малості.

При найбільш часто використовуваних напруженостях лазерного поля порядкуВ/м співвідношення (1.7) дотримується дуже добре. При підвищенні *Е* відмінність між вкладами, що даються членами, Стає все менше і менше, і при полях В/м (це, мабуть, найвищі лазерні поля) ці вклади мають один і той же порядок величини. При ще великих напруженостях лазерного поля, а саме при напруженостях поля, близьких до напруженості внутрішнього поля в середовищі,, Всі члени ряду (1.6) мають один і той же порядок величини

, (1.8)

звідки випливає, що

, (1.9)

і відповідно до (1.6)

, (1.10)

т.ч. кожен наступний член ряду (1.10) менше попереднього в раз.

Для оцінки вважатимемо, що воно дорівнює такій напруженості зовнішнього поля, яке зміщує електрон в кристалі на міжатомну відстань *r*. Тоді можна записати:

, (1.11)

де  - пружна константа, кг - маса електрона,  - власна частота коливань електрона, кл − заряд електрона, м - міжатомних відстань в кристалі. власна частотавизначається по частоті електронного поглинання, яка для більшості прозорих кристалів знаходиться в ультрафіолетовій області спектра; вважатимемо, що м, отже,  і  Н / м (= 105 дин / см). Тому

 B / м. (1.12)

отримане значення  по порядку величини збігається з напруженістю поля всередині атома водню на першій боровськой орбіті ():

. (1.13)

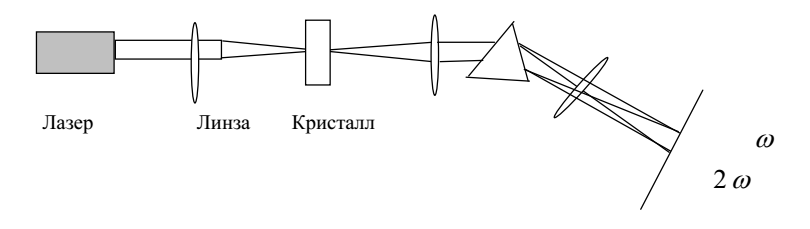
зроблені оцінки  показують, що для практично досяжних полів () Лазерного випромінювання , І з урахуванням (1.9) підтверджують співвідношення (1.7) для членів ряду (1.6).

Слід зауважити, що трохи нелінійних доданків в ряду (1.6) зовсім не означає, що нелінійні ефекти завжди дуже малі. При дотриманні деяких умов (умов фазового синхронізму) нелінійні ефекти можуть накопичуватися і проявляти себе дуже сильно.

## 1.2. Механізми оптичної нелінійності.

### 1.2.1. Експеримент Франкена. Фізичні причини нелінійності.

Народження нелінійної оптики було ознаменовано експериментом по генерації другої гармоніки, виконаним Франкеном. В цьому експерименті промінь рубінового лазера з довжиною хвилі 694,2 нм пропускався через кристал кварцу; при цьому на виході з кристала спостерігалося УФ випромінювання на довжині хвилі 347,1 нм. Генерація другої гармоніки була першим спостерігаємим нелінійним оптичним ефектом, при якому падаюче на середу когерентне випромінювання викликає генерацію когерентного випромінювання на виході.

Рис.1.1. Схема досвіду Франкена по генерації другої оптичної гармоніки.

Кожен нелінійний оптичний процес можна уявити собі що складається з двох етапів; спочатку світло великої інтенсивності викликає нелінійний оклик середовища, а потім ця реакція середовища в свою чергу, нелінійним чином змінює оптичні поля. Перший етап описується матеріальними рівняннями середовища, другий - рівняннями Максвелла. Надалі ми будемо будувати цей ланцюжок для різних механізмів нелінійності.

В першу чергу ми будемо розглядати ефекти, пов'язані із взаємодією електричного поля світлової хвилі з середовищем. Магнітні ефекти, як правило, набагато слабкіші так як в середовищі (наприклад, в плазмі) параметр малий, де швидкість руху зарядів. Отже, членами з цим коефіцієнтом в рівнянні Максвелла можна знехтувати.



Тоді основна фізична величина, що відповідає за взаємодію поля світлової хвилі з речовиною - поляризація, яка є сукупність дипольних моментів елементарних частинок середовища.

, (1.2.1)



де є повний дипольний момент молекули, а n - концентрація частинок.



В свою чергу,, де - поляризованість. тоді



, (1.2.2)



де - сприйнятливість



Можливі два основних випадки:

1. - константа. Тоді середовище - лінійна.



1. =.Тоді середа - нелінійна.



Або можна іншою фізичною характеристикою описувати нелінійність:

, де - діелектрична проникність.



Можна виділити три основні фізичні причини нелінійності виходячи з виразу для :



1. Зміна концентрації середовища при дії поля ().



1. Зміна поляризуємості середовища при дії поля ().



1. Зміна орієнтації молекул під дією поля.

### 1.2.2.Теплова нелінійність.

Теплова нелінійність пов'язана з поглинанням енергії світлової хвилі і її нагріванням. Побудуємо ланцюжок нелінійної взаємодії поля з середовищем для цього механізму нелінійності:

*Нагрівання → зміна тиску → зміна щільності → зміна → зміна показника заломлення → зміна умов проходження світла, ініціюючого нагрів → зміна поля падаючої хвилі.*



Можна оцінити умови необхідні для спостереження нелінійних ефектів, пов'язаних з поглинанням і нагріванням:

, (1.2.3)



, (1.2.4)



, (1.2.5)



. (1.2.6)



Таким чином

; . (1.2.7)



Такий опис вірно лише в разі локальних зв'язків між і T, і n і . Для спостереження ефекту необхідно щоб відбувався достатній набіг фази при проходженні поля через середу:, Де l товщина середовища, а k - хвильовий вектор падаючої хвилі в середовищі без обурення показника заломлення.



У стаціонарному режимі:

, (1.2.8)



де - характерний час встановлення (час релаксації), а - радіус світлового пучка



Таким чином, вважаючи малим, отримуємо вираз для *I0* (інтенсивності світлового пучка, необхідної для спостереження нелінійних ефектів):



, (1.2.9)



де - незбуджене значення щільності, відповідне



### 1.2.3. Ефекти електрострикції.

Найпростіший ефект - втягування діелектрика в неоднорідне електричне поле. Під дією неоднорідного поля відбувається перерозподіл заряду і сила, що діє на діелектрик в цілому дорівнює:, Розділяється заряд, або в тривимірному випадку:



(1.2.10)



- стрікціонная сила, а - коефіцієнт електрострикції.



Якщо E - електричне поле світлової хвилі, то закон буде таким же.

Побудуємо ланцюжок нелінійної взаємодії для цього механізму:

*Змінне поле → стрікціонная сила → зміну густини середовища (втягування) → зміна показника заломлення → зміна умов поширення світлового пучка.*

Розглянемо в якості середовища рідина або газ. Тоді матеріальними рівняннями, що описують цю середу, будуть рівняння Нав'є - Стокса і рівняння безперервності (найпростіший випадок):

(1.2.11)



(1.2.12)



В даному випадку ми записали рівняння для збурень густини середовища і швидкості руху середовища, викликані стрікціоннимі ефектами (т. Е. Лінеаризовані рівняння). Вважаємо, що, а . - швидкість звуку в середовищі, - в'язкість, - щільність стрікціонной сили. Можна по іншому переписати рівняння Нав'є - Стокса:



. (1.2.13)



Як бачимо, ми отримали хвильове рівняння для обурення щільності . Т. е. Результатом впливу змінного поля на середу є утворення періодичної структури, за рахунок просторових компонент полів інтерференції, Що біжать зі швидкістю звуку. У свою чергу, на даній решітці поле интерферирующей хвилі посилюється. Таким чином, досягається зворотний зв'язок.



У стаціонарному режимі, якщо пучок гаусів: - характерна зміна щільності, а - зміна діелектричної проникності.



Для часу релаксації можна отримати формулу: , де - хвильове число звукової хвилі.



### 1.2.4. Орієнтаційна, керрівська нелінійність.

Рассмотрм нелінійні ефекти, пов'язані ні з зміною тільки щільності речовини під впливом поля світлової хвилі, а з залежністю поляризуемости від поля.



При взаємодії поля з середовищем, що складаються з нейтральних молекул (або вже мають якийсь дипольний момент), у молекул з'являється наведений дипольний момент. тобто Середа поляризується. Поле прагне розвернути диполі: - момент сили чинний на диполь, але . Отже, змінюється ефективна поляризованість. Легше розділити заряди в разі, коли поле направлено вздовж частки. Виникає якась впорядкованість диполів всіх частинок уздовж поля. Значить, середовище стає анізотропна. Найбільш яскраво цей тип нелінійності проявляється при розгляді розсіювання крила Релея.



Проте цьому процесу перешкоджає тепловий рух, яке призводить до хаотично орієнтованим дипольним моментам частинок в середовищі.

Можна ввести параметр порядку, що характеризує частку частинок, орієнтованих уздовж поля Q. Максимум порядку досягається, коли всі молекули орієнтовані уздовж одного напрямку.

Рівняння для Q - рівняння обертальної дифузії Дебая. У рідини воно приймає наступний вигляд:

, (1.2.14



де - анізотропія поляризуемости молекул, - в'язкість для окремої молекули, - час релаксації Дебая,.



Для різних речовин може сильно відрізнятися. від з у рідин до 1 з у рідких кристалів, де орієнтуються не кожна частка в окремо, а цілі асоціації частинок.



Ланцюжок взаємодії в цьому випадку буде:

*Поле світлової хвилі поляризує молекули → вони розгортаються в напрямку поля → змінюється ефективна поляризованість молекул → змінюється показник заломлення → змінюються умови проходження поля світлової хвилі → змінюються параметри поля*.

### 1.2.5.Електронна нелінійність.

Електронний перехід в атомі можна асоціювати з осцилятором. Т. е. Теорію дисперсії можна будувати як теорію взаємодії змінного поля світлової хвилі з осцилятором. Всі електронні осцилятори нелінійні (їх рівняння містять нелінійні члени). Причиною цього є ефект Штарка, що полягає в зміні положень енергетичних рівнів в атомі під дією електричного поля. Інший ефект, пов'язаний з появою ангармонізму, наявність дефектів в кристалах. Наприклад, в разі дефекту в кристалі пов'язаного з наявністю 2-х зарядного іона у вузлі кристалічної решітки замість одне зарядного, потенціал електричного поля поблизу мінімуму (в якому належить рухатися електрону має вигляд):

. (1.2.15)



Нехай на такий кристал діє електричне поле світлової хвилі (в напрямку осі x). Рівняння рухомого електрона в цьому кристалі:

. (1.2.16)



З огляду на в розкладанні V (x) члени до включно, одержимо:



, Якщо a = 0 - простий гармонійний осцилятор. Для сили F рівняння має вигляд



(1.2.17)



Розглянемо відгук осцилятора на прикладена поле, що має вигляд:

(1.2.18)



Ангармонічного доданок в нашому рівнянні вважається малим, тому його можна розглядати як обурення при знаходженні рішення методом послідовних наближень:



Наведена електрична поляризація є просто .

У наближенні першого порядку з лінеаризованого рівняння отримуємо:

, (1.2.19)



(1.2.20)



де «к. с.»позначає комплексно поєднане вираз.

Наближення другого порядку виходить при підстановці замість вираження



Як видно з наближення другого порядку, завдяки квадратичному закону взаємодії осцилятора з полем, пов'язаного з наявністю ангармонічного доданка, виникають нові компоненти поляризації на частотах , і 0. Ці осцилюючі компоненти поляризації будуть генерувати нові електромагнітні хвилі на частотах ,. Таким чином, отримують просте пояснення процеси генерації сумарною і разностной частот і другої гармоніки. Виникнення поляризації на нульовій частоті отримало назву оптичного випрямлення.



Так як зміщення електрона x лінійно пов'язано з поляризацією, то припущення про малість добавки рівносильно припущенням про малість поля E в порівнянні з характерним полем всередині кристалу. Тобто поляризацію можна розкласти в ряд за ступенями поля E, так що кожен наступний член розкладання буде багато менше попереднього:



, (1.2.21)



де



У загальному випадку для векторної записи поля можна ввести тензорні сприйнятливості:

(1.2.22)



Нелінійні ефекти називаються "квадратичними", або "кубічний" і так далі, в залежності від того якого порядку члени враховуються в розкладанні для P. Для різних середовищ сприйнятливості різні (містять різні члени в розкладанні).

Відразу можна відзначити, що для ізотропного середовища . Дійсно, так як вираз для діелектричної проникності має вигляд:



, (1.2.23)



то присутність члена, лінійно залежить від поля, визначає залежність діелектричної проникності від орієнтації вектора поля. Якщо середовище має центром інверсії, то знак поля не повинен впливати на її властивості. Тому, ефекти квадратичної нелінійності існують лише в анізотропних середовищах без центру інверсії.

Для кубічного нелінійності, яку характеризує , Такої заборони немає, і тому вона більш поширена.



## 1.3. Електромагнітні процеси в нелінійному середовищі.

### 1.3.1. Рівняння Максвелла. Хвильове рівняння.

В основі сучасної теорії електромагнітних процесів в різних середовищах лежать рівняння Максвелла:

 (1.3.1)

де  - напруженості електричного і магнітного полів в точці  в момент , і електрична і магнітна індукції відповідно  - щільність зарядів,  - щільність струму в тій же точці.



Одних рівнянь Максвелла недостатньо для вирішення електромагнітної завдання, потрібно написати так звані матеріальні рівняння.

 (1.3.2)

де і - вектори поляризації і намагніченості середовища (щільності електричного і магнітного моментів) Зміна магнітного моменту - досить інерційний процес, тому на частотах, характерних для оптичних хвиль (~ Гц), намагніченість не встигає виникнути, і в більшості випадків можна вважати, що = 0 і . У слабких полях поляризація середовища пропорційна напруженості поля:



, (1.3.3)



де - тензор лінійної діелектричної сприйнятливості. У координатної формі рівняння (3.3) записується у вигляді. тоді,



, (1.3.4)



де - тензор лінійної діелектричної проникності. Взявши ротор від третього з рівнянь (3.1), і підставивши в нього четвертий рівняння, отримуємо



. (1.3.5)



Використовуючи відоме співвідношення для подвійного векторного твори, ліву частину (3.5) можна представити у вигляді

. (1.3.6)



У лінійної ізотропному середовищі дивергенція E дорівнює нулю, і з огляду на (3.4), ми приходимо до хвилевого рівняння:

(1.3.7)



Рішенням хвильового рівняння є будь-яка функція виду , де - одиничний вектор у напрямку поширення хвилі, - фазова швидкість хвилі: - показник заломлення:. Часто довільне рішення хвильового рівняння представляють у вигляді суми плоских монохроматичних хвиль - гармонійних коливань виду



(1.3.8)



У цьому виразі - одиничний вектор поляризації, - циклічна частота, - хвильовий вектор, A - комплексна амплітуда. Модуль хвильового вектора пов'язаний з довжиною хвилі світла, частотою і кругової частотою співвідношеннями . Подання хвилі (1.8) у вигляді суми двох взаємно сполучених доданків забезпечує речові поля напруженості. У лінійної оптики можна обмежитися одним з них:, І після проведення обчислень просто взяти дійсну частину від результату. Однак в рівняннях нелінійної оптики виникають члени видуі т. п., тому необхідно в явному вигляді враховувати обидва доданків. Слід також пам'ятати, що в деяких текстах рівняння (1.3.8) записується без коефіцієнта 1/2. Для плоских хвиль друга пара рівнянь Максвелла зводиться до співвідношень



(1.3.9)



причому амплітуди магнітного і електричного поля пов'язані між собою: .



Використовуючи відоме співвідношення векторного аналізу,

(1.3.10)



і рівняння Максвелла (3.1), отримаємо:

(1.3.11)



У це рівняння входять величини: щільність енергії електромагнітного поля W і щільність потоку енергії - вектор Пойнтінга :



(1.3.12)



Отже, вираз (1.3.11) - це рівняння безперервності для щільності електромагнітної енергії в середовищі (закон збереження енергії):

(1.3.13)



Фізичний сенс даного рівняння: зміна електромагнітної енергії в деякому елементарному обсязі середовища () Дорівнює потоку енергії () Через кордон цього обсягу плюс диссипация енергії в тепло () Через провідникові току.



*Інтенсивність* хвилі - це середня величина щільності потоку енергії. Оскільки середнє значення модуля вектора Пойнтінга за час більше періоду хвилі в два рази менше, ніж його амплітуда: , То інтенсивність виражається через амплітуду електричного поля наступним чином (для лінійно поляризованої хвилі):



(1.3.14)



Інше рішення хвильового рівняння - сферична хвиля:

. (1.3.15)



Якщо в хвильовому рівнянні знехтувати другої похідної амплітуди по поздовжній координаті z: , То для хвиль виду воно зводиться до параксіальної хвильовому рівнянню (також відомому як параболічне рівняння Леонтовича):



(1.3.16)



де - «поперечний» лапласіан: . Дане рівняння описує поширення (дифракцию) світла в параксіальної наближенні. Одним з рішень цього рівняння є гаусів пучок, комплексна амплітуда якого дорівнює



. (1.3.17)



При цьому параметр q визначає радіус кривизни хвильового фронту R (z) і розмір пучка w (z):

(1.3.18)



Тобто

(1.3.19)



а параметри пучка визначаються через довжину перетяжки співвідношеннями



(1.3.20)



У перетягуванні (при) Гаусів пучок має плоский хвильовий фронт, а на відстані радіус кривизни *R* ≈ z, тобто він стає сферичної хвилею, але з гаусовим розподілом інтенсивності в поперечній площині. Інтенсивність гауссова пучка визначається виразом,



(1.3.21)



де - інтенсивність на осі пучка в перетягуванні. Потужність пучка дорівнює



(1.3.22)



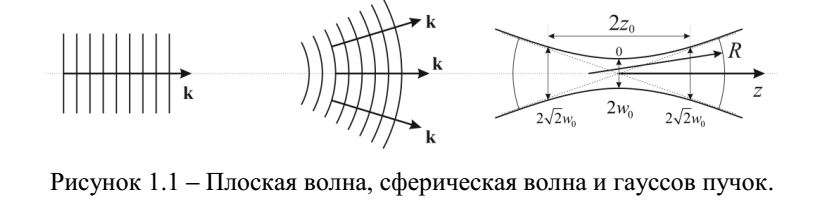
Розбіжність гауссова пучка дорівнює

(1.3.23)



В конусі з кутом при вершині випромінюється близько 86% потужності пучка.





Малюнок 1.2 - Плоска хвиля, сферична хвиля і гаусів пучок.

### 1.3.2. Поляризація діелектриків в постійному електричному полі у випадку дипольного газу.

У діелектриках електрони можуть здійснювати рухи лише в межах атомів і молекул, вони називаються пов'язаними. Зміна положення пов'язаних зарядів під дією поля називають процесом поляризації діелектрика.

Розглянемо процес поляризації в газах на прикладі дипольного газу, тобто газу, молекули якого мають постійним дипольним моментом.

нехай - вектор дипольного моменту окремої молекули, n - число молекул в одиниці об'єму. Розрахунок показує, що вектор поляризації пов'язаний з величиною вектора виразом (рис.3.2)

; (1.3.24)

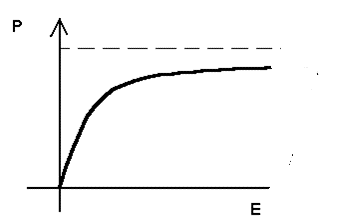


Рис.1.3.

Розглянемо два важливих окремих випадки: Величина визначає максимальну потенційну енергію взаємодії молекули з електричним полем. Вона дорівнює роботі, яку треба зробити, щоб електричний дипольний момент, спрямований уздовж поля, повернути на 90º.

Якщо ця енергія велика в порівнянні з середньою енергією теплового руху окремої молекули, тобто

 (1.3.25)

то тепловий рух не зможе порушити орієнтацію диполів вздовж поля. При цьому для поляризації отримуємо

 (1.3.26)

тобто величина Р набуває максимально можливе значення і не залежить від Е. У зворотному граничному випадку, коли енергія теплового руху велика в порівнянні з, Т. Е.

 (1.3.27),

отримуємо для вектора поляризації

 (1.3.28)

або

, де. (1.3.29)

Звідси видно, що тепловий рух перешкоджає орієнтації дипольних моментів.

Т.ч. тільки за умови (3.27) спостерігається лінійна залежність вектора поляризації, а саме - при наявності слабкого поля. У сильному полі зв'язок між векторами і стає нелінійної. Для постійного поля це формула (3.24).

### 1.3.3. Поляризація діелектриків в постійному електричному полі у випадкуразі газу, атоми якого не володіють дипольним моментом.

Щоб проілюструвати поява нелінійної залежності величин  і , Обчислимо їх у рамках простий класичної задачі. Розглянемо газ, що складається з атомів без постійного електричного дипольного моменту. Якщо такий газ помістити в зовнішнє електричне поле (постійне - далі), то заряди в кожному атомі змістяться на деяку відстань і атом придбає дипольний момент.

Задамося найпростішою моделлю атома: нехай є два точкових заряди: позитивний (ядро йди атомний залишок) і негативний (електрон). Під час відсутності зовнішнього поля положення точкових зарядів збігається. У зовнішньому полі заряди розійдуться, при цьому дипольний момент частинки дорівнює



вектор поляризації де n - число атомів в одиниці об'єму. При виключенні поля дипольний момент зникає. Це означає, що існує сила,, Спрямована проти зсуву. Щоб знайти зсув, прирівняємо нулю суму сил і , Що діють на електрон. З цієї рівності знайдемо зміщення

 (1.3.30)

Отже, вектор поляризації  пов'язаний з полем виразом

, де . (1.3.31)

Т.ч. ми отримали лінійну зв'язок між векторами і . Якщо газ складається з частинок, що володіють постійним дипольним моментом, то при включенні зовнішнього поля відбувається як орієнтація постійних дипольних моментів, так і зміщення центрів. В результаті при слабкому полі, коли зв'язок векторів і  є лінійної, можна об'єднати вираження для , Тобто для поляризуемости отримуємо співвідношення

 (1.3.32)

Вираз (3.30) виявляється справедливим при слабких полях. У сильному полі зміщення центрів стає настільки великим, що порушується пропорційність між силою і зміщенням. Величина сили стає більш складною функцією зсуву. При не дуже великих полях її можна представити у вигляді

 (1.3.33)

З боку електричного поля діє сила

 (1.3.34)

Прирівнюючи пружну силу і один одному, отримаємо

 (1.3.35)

З рівняння для поляризації знаходимо  і підставляємо в (1.3.35).

Отримуємо нелінійне рівняння для поляризації.

 (1.3.36)

Вирішимо рівняння щодо , Вважаючи член, пропорційним P3, малим. нехай, де  - член нульового порядку малості, а - член першого порядку малості. Отримуємо два рівняння: одне для членів нульового порядку малості, інше - для членів першого порядку малості.

 (1.3.37)

Вирішення цієї системи дає

 (1.3.38)

або

, (1.3.38а)

де сприйнятливість  має вигляд

 (1.3.39)

і є нелінійної функцією поля. Якщо ж поле досить слабке, то членом, що містить можна знехтувати (тобто ми нехтуємо в вираженні для  членом ) І сприйнятливість стає постійною величиною, тобто

 (1.3.40)

Коли говорять про слабку стать, мають на увазі поле, своєю чергою величини значно менше внутрішньоатомних, а під сильними полями на увазі поля, близькі до внутрішньоатомних ( В / см).

Конкретні вираження для діелектричної проникності можна отримати, знаючи сприйнятливість , Т. Е.

 або , (1.3.41)

де  і  визначаються вищенаведеними формулами (3.39, 3.40)

Щільність індукованих зарядів пов'язана з вектором поляризації формулою

, (1.3.42)

а індукований струм (щільність струму)

. (1.3.43)

Звідси випливає, що в якості матеріального рівняння для діелектрика зручно використовувати функцію  або , Які пов'язані співвідношенням .

Отже, ми отримали нелінійні матеріальні рівняння для випадку постійного поля. Ці формули залишаються справедливими для будь-якої ізотропного середовища.

Якщо ж середовище анізотропна, то формули слід змінити. Сприйнятливість середовища і діелектрична проникність в анізотропному середовищі замість скалярів стають тензорами другого рангу, а зв'язок між векторами і  має вигляд

 (1.3.44)

де  - одиничний тензор.

Тензор діелектричної проникності виражається через тензор сприйнятливості середовища таким чином

. (1.3.45)

У цих формулах мається на увазі підсумовування по повторюваним індексам.

Наприклад, в декартовій системі координат можна записати

 (1.3.46)

А тензор діелектричної проникності в декартовій системі координат буде мати вигляд

 (1.3.47)

де  - симетричний тензор другого рангу.

При цьому виконуються співвідношення

. (1.3.48)

Теж саме відноситься до тензора сприйнятливості. Якщо напруженість електричного поля не надто велика, то компоненти тензора сприйнятливості можна розкласти в ряд Тейлора за компонентами поля. Залишивши тільки перші три члени розкладання, маємо такий вираз для тензора сприйнятливості

, (1.3.49)

де  і  - деякі нові тензори.

тензор відмінний від нуля лише для кристалів, які володіють п'єзоелектричними властивостями. Для інших кристалів, а також ізотропних засобів тензор дорівнює нулю

## 1.4. Система пов'язаних хвильових рівнянь в нелінійному середовищі.

### 1.4.1. Рівняння Максвелла.

Система рівнянь Максвелла для незарядженого изотропного діелектрика має вигляд (магнітні властивості середовища для розглянутого випадку)



(1.4.1)



Для ізотропного діелектричної середовища рівняння замінюється рівнянням



. (1.4.2)



Рівняння (4.2) може розглядатися і в застосуванні до анізотропних діелектрика, проте в цьому випадку нехтується складова вектора напруженостів напрямку поширення хвилі (в нашому випадку це вісь z), як показує досвід така зневага цілком допустимо. Фізично нехтування означає, що вектор напруженості електричного поля і вектор діелектричного зсуву спрямовані паралельно. У повністю анізотропному середовищі це, очевидно, не так. Це є наслідком того, що в загальному випадку діелектрична проникність є тензором. Математично це є наслідком того, що вихідна система (4.1) не має спільного рішення і дозволяється в загальному випадку лише при спеціально підібраних початкових умов не представляють, проте, ніякого фізичного інтересу.



Перетворимо систему рівнянь (4.1) наступним чином:



або

(1.4.3)



При обліку (4.2) і використовуючи вирази



рівняння (4.3) перетвориться до виду

. (1.4.4)



Рівняння (4.4) описує поширення перевипромінення атомами речовини хвилі, породженої хвилею поляризації. У порожнечі вектор поляризуемости дорівнює нулю, в результаті маємо граничний випадок для поширення електромагнітної хвилі в вакуумі.



У загальному випадку вектор поляризуемости містить лінійну і нелінійну частини:

, (1.4.5)



тоді вектор електричної індукції може бути представлений у вигляді

, (1.4.6)



де описує поляризацію, яка описується нелінійними ефектами, - тензор лінійної діелектричної проникності, і .



### 1.4.2. Рівняння електромагнітних хвиль в нелінійному середовищі.

Як відомо, в лінійній оптиці виконується принцип суперпозиції, в нелінійній оптиці диференціальні рівняння поширення хвилі в середовищі нелінійні, тому принцип суперпозиції порушується; це слід не тільки з математичної природи рівнянь, а й підтверджено великою кількістю експериментальних даних. При використанні пучків монохроматичного світла виникає в середовищі поляризація є нелінійної. З огляду на (4.4) і (4.5) отримаємо рівняння для поширення електромагнітних хвиль в нелінійної середовищі:

(1.4.7)



Якщо поле падаючої хвилі являє собою суперпозицію

(1.4.8)



то рівняння (4.8) можна переписати для монохроматичної складової

. (1.4.9)



Хвиля нелінійної поляризації породжує перевипромінення хвилю на тій же частоті, але ця перевипромінення хвиля поширюється з іншої фазовою швидкістю, ніж сама хвиля нелінійної поляризації. Якщо рівняння перевипромінення хвилі з частотою, Що розповсюджується з фазової швидкістю , Запишемо у вигляді



, (1.4.10)



то рівняння хвилі поляризації з такою ж частотою можна записати у вигляді (в області прозорості їх початкові фази збігаються):



. (1.4.11)



де , тому.Враховуючи що



,



і, підставляючи (4.10) і (4.11) в (4.9), отримаємо

. (1.4.12)



Рівнянь (1.4.12) можна записати стільки, скільки монохроматичних складових міститься в поле (1.4.8), тобто для кожної з монохроматичних хвиль з частотами. Оскільки нелінійна поляризація на частотівиражається через твір полів на інших частотах ,, то рівняння (4.12) будуть представляти собою систему пов'язаних хвильових рівнянь.



### 1.4.3. Укорочені рівняння для амплітуд пов'язаних хвиль в ізотропному нелінійному середовищі.

Нелінійні властивості середовища в основному виражені слабо в порівнянні з лінійними, значні зміни амплітуди можуть відбутися тільки на відстанях, значно перевищують довжину хвилі. Зміни ж амплітуди на відстані, рівному довжині хвилі, дуже мало і тому амплітудахоча і змінюється в міру поширення, але змінюється повільно. Цю обставину можна використовувати для спрощення нелінійних рівнянь - «вкоротити», а саме - звести систему нелінійних рівнянь другого порядку для гармонійних полів до системи нелінійних рівнянь першого порядку для амплітуд пов'язаних хвиль.



Розглянемо плоскі хвилі з амплітудами, що не залежать від часу, вважаючи, що всі вони поширюються уздовж осі z.

(1.4.15)



Рівняння (4.12) набирає вигляду

. (1.4.16)



Для ізотропного середовища , де - скалярна величина, тому тензорний добуток перетворюється в просте множення і рівняння (8.16) для абсолютної величини записується у вигляді



. (1.4.17)



У припущенні про повільне зміні амплітуди можна вважати і знехтувати другої похідної, виконавши певні перетворення, отримаємо:



. (1.4.18)



де - лінійний коефіцієнт поглинання. Для непоглощающіх середовища () Замість (4.23) отримаємо



. (1.4.19)



Рівняння (4.18) і (4.19) називаються укороченими рівняннями для амплітуд; записуючи для кожної частоти відповідне рівняння, ми отримаємо систему пов'язаних рівнянь для амплітуд через амплітуди нелінійної поляризації для хвиль різних частот, що містяться в поле (4.8). Наявність зв'язку хвиль різних частот (що мають амплітуди) Один з одним має місце в залежності від різних амплітуд поля. Пов'язані хвилі в речовині взаємодіють між собою, що призводить до передачі енергії від однієї хвилі до іншої, яка визначається різницею фаз між взаємодіючими хвилями.



# Розділ 2. НЕЛІНІЙНІ ОПТИЧНІ ЕФЕКТИ.

## 2.1. Генерація другої гармоніки.

### 2.1.1.Генерація другої гармоніки на основі інтегрального підходу.

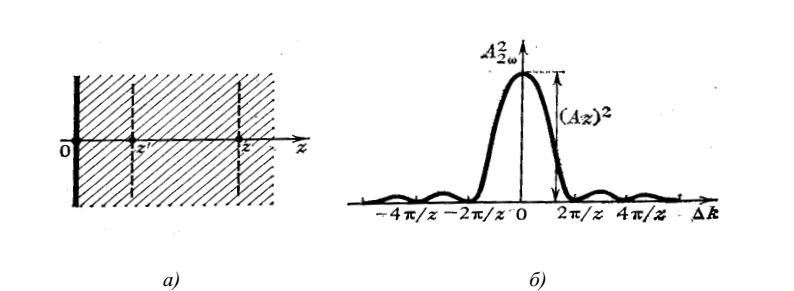
Нехай в квадратично-нелінійного середовищі по осі z з фазової швидкістю поширюється світлова хвиля на частоті . Хвиля буде наводити в середовищі локальні дипольні моменти; це означає, що з тією ж самою швидкістю в середовищі буде поширюватися хвиля квадратичної поляризації на частоті 

. (2.1)

Виникаючі при поширенні хвилі поляризації локальні диполі переизлучают на частоті (На частоті хвилі поляризації). Перевипромінення в різних точках середовища світлові хвилі поширюються уздовж осі z і інтерферують один з одним. Інтерференція цих хвиль може, в принципі, привести до формування хвилі другої гармоніки; іншими словами, можливо просторове накопичення нелінійного ефекту. Виберемо вісь z перпендикулярно до кордону квадратично-нелінійного середовища;відповідає кордоні середовища (рис. 2.1, а). Нехай в середовищі уздовж осі z поширюється плоска хвиля квадратичної поляризації, частота якої дорівнює , А фазова швидкість . Тоді фаза цієї хвилі в деякій точці є

. (2.2)

Вже згадана в точці z фаза перевипромінення світлової хвилі, що виникла в точці z ', буде відрізнятися від  на величину . тут- хвильовий вектор і фазова швидкість ****) Перевипромінення світлової хвилі на частоті .



Мал. 2.1

Інакше кажучи, розглянута в точці z фаза світлової хвилі, перевипромінення в точці z ', може бути представлена у вигляді

. (2.3)

де  - хвильова расстройка, яка через дисперсії не дорівнює нулю.

Результуюча хвиля другої гармоніки, що розглядається на відстані z від кордону середовища, є результат інтерференції хвиль, перевипромінення в різних точках z 'на проміжку від  до 

. (2.4)

де А- деякий множник, що не залежить ні від ні від . З виразу (2.4) випливає

. (2.5)

З рівняння (2.5) знаходимо вираз для амплітуди другої гармоніки в точці z:

. (2.6)

На рис. 2.1, б показана для фіксованого z залежність від , Яка визначається співвідношенням (2.6), - так звана крива синхронизма. Це є типова інтерференційна крива. Найбільший позитивний інтерференційний ефект (найбільша інтенсивність другої гармоніки) досягається при виконанні умови

 або, інакше,  а . (2.7)

Це і є умова хвильового, або фазового, синхронизма. Умова фазового синхронізму є умова рівності нулю хвильовий розладу. Воно еквівалентно в даному випадку умові рівності фазових швидкостей хвилі другої гармоніки і хвилі квадратичної поляризації. З викладеного вище випливає, що умова фазового синхронізму є не що інше, як умова, що забезпечує найбільш сприятливий ефект інтерференції світлових хвиль, перевипромінення в різних точках нелінійного середовища. Як правило, більшість прозорих середовищ мають позитивну дисперсією, тобто показник заломлення зростає при збільшенні частоти хвилі, і умова хвильового, або фазового, синхронизма (2.7), не виконується в ізотропному середовищі. Тому в подальшому розгляді основна увага буде приділена дослідженню нелінійно-оптичних ефектів в анізотропних кристалічних середовищах.

### 2.1.2.Довжина когерентності.

Повернемося до співвідношення (2.6) і розглянемо залежність від z при  і при . З виразу (2.6) випливає, що при наявності синхронизма () Амплітуда другої гармоніки лінійно зростає з відстанню z, пройденим випромінюванням в нелінійної середовищі: . При наявності хвильової розладу () Амплітуда другої гармоніки періодично змінюється з відстанню z. Період зміни становить

**. (2.8)

Максимальне значення амплітуди другої гармоніки досягається на довжині нелінійного кристала

**. (2.9)

На цій же довжині відбувається зменшення амплітуди гармоніки від максимального значення до нуля. довжинуназивають довжиною когерентності. Розглянутий тут інтегральний підхід при інтеграції другої гармоніки має методологічне значення, оскільки дозволяє ввести основні поняття, такі як фазовий синхронізм, довжина когерентності і хвильова расстройка. Однак використання даного підходу при дослідженні більш складних явищ нелінійної оптики викликає ряд труднощів.

### 2.1.3.Фазовий синхронізм і методи його реалізації.

Як відомо, поширення світла всередині оптично анізотропного середовища має особливості. У вибраному напрямку в середовищі поширюються дві лінійно-поляризовані хвилі на одній і тій же частоті з різними швидкостями (різними показниками заломлення); вектори поляризації хвиль взаємно перпендикулярні. З існуванням в кристалі двох світлових хвиль, що поширюються з різними швидкостями, пов'язане явище подвійного променезаломлення. Кожній з хвиль відповідає своя поверхню значень показника заломлення (індікатріса показника заломлення), що наочно демонструє, як залежить від напрямку хвильового вектора показник заломлення для даної хвилі. В одновісних кристалах одна з индикатрис показника заломлення є сфера, а інша еліпсоїд обертання навколо оптичної осі кристала. Перша індікатріса відповідає звичайної (ordinary) світловий хвилі; її показник заломлення не залежить від напрямку хвильового вектора. Друга індікатріса відповідає незвичайною (ехtraordinary) хвилі; її показник заломлення залежить від кутаміж напрямком хвильового вектора і оптичною віссю кристала. вектор звичайної хвилі перпендикулярний до площини кута ; вектор незвичайної хвилі лежить в зазначеній площині.

На рис. 2.2 показані перетину индикатрис показника заломлення площиною, що проходить через оптичну вісь: а - в негативному одноосьовому кристалі, б - в позитивному одноосьовому кристалі. Кристал характеризується двома параметрами, залежними від частоти, - головними значеннями показника заломлення і ; сенс цих параметрів ясний з малюнка. параметр  визначає швидкість звичайної хвилі в будь-якому напрямку (). параметр визначає швидкість незвичайної хвилі в напрямку, перпендикулярному до оптичної осі. У напрямку оптичної осі швидкості обох хвиль збігаються. якщо, То маємо негативний одноосний кристал, а якщо , То - позитивний. Оскільки використовувані в нелінійній оптиці одновісні кристали є, як правило, негативними, обмежимося розглядом негативних одноосьових кристалів. Залежність показника заломлення незвичайної хвилі від кута  виводиться з рівняння еліпса

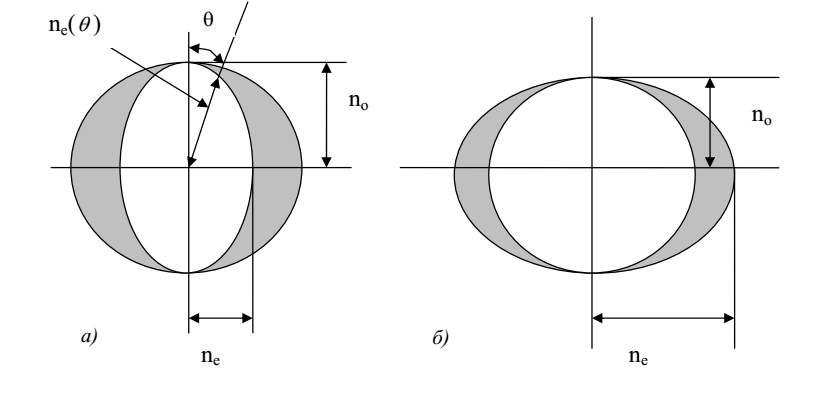
 (2.10)

Уявімо це рівняння у вигляді (див. Рис. 2.2)

. (2.11)

Звідси знаходимо шукану залежність

. (2.12)



Мал. 2.2. Перетин индикатрис показників заломлення площиною, що проходить через оптичну вісь.

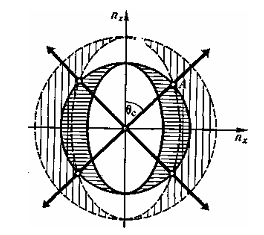
З рівняння (2.12) випливає, що швидкість незвичайної хвилі, що розповсюджується під кутом θ до оптичної осі, дорівнює

. (2.13)

### 2.1.4.Віди фазового синхронізму.

В області прозорості діелектрика дисперсія показника заломлення є нормальною: зі зростанням частоти показник заломлення збільшується. На рис.5.3 показані перетину индикатрис показника заломлення негативного одноосного кристала для основної частоти (безперервні криві) і другої гармоніки (штрихові криві). З малюнка бачимо, що в напрямках, що утворюють кут з оптичною віссю, виконується рівність показників заломлення звичайної хвилі на основній частоті та незвичайної хвилі на частоті другої гармоніки:

. (2.14)



Мал. 2.3

Співвідношення (2.14) може розглядатися як умова фазового синхронізму для генерації другої гармоніки в разі, коли хвильові вектори взаємодіючих хвиль колінеарні і при цьому основні хвилі є звичайними, а хвиля другої гармоніки - незвичайною. Для виконання синхронизма хвильові вектори повинні бути орієнтовані од кутомдо оптичної осі. Цей напрямок наривають напрямком синхронизма, а кут- кутом синхронізму. У просторі ці напрямки утворюють конус синхронизма. Наведений приклад відповідає одній з різновидів фазового синхронізму. Види синхронизма діляться на дві групи (два типи). При синхронізмі першого типу обидві хвилі на основній частоті мають одну і ту ж лінійну поляризацію, а хвиля на частоті другої гармоніки має перпендикулярну поляризацію. При синхронізмі другого типу хвилі на основній частоті мають взаємно перпендикулярні поляризації. Якщо одноосний кристал негативний, то синхронізм першого типу може бути реалізований в тому випадку, коли обидві хвилі на основній частоті є звичайними, а хвиля другої гармоніки - незвичайною; це є випадок так званого ff-e-синхронізму або, інакше, ff-е-взаємодії. У позитивному одноосьовому кристалі синхронізм першого типу може бути реалізований, коли хвилі на основній частоті є незвичайними, а хвиля другої гармоніки звичайної (її-про-взаємодія). Синхронізм другого типу в негативному кристалі відповідає е-е-взаємодії, а в позитивному ео-о-взаємодії.

Крім того, слід розрізняти скалярний і векторний синхронізмі, При скалярному синхронізмі хвильові вектори взаємодіючих світлових хвиль колінеарні, а при векторному - не колінеарні. Таким чином, якщо обмежитися негативними одноосьовими кристалами, то слід розглянути чотири види синхронизма: скалярні ff-е і е-е, векторні ff-е і е-е.

## 2.2. Нелінійний показник заломлення

Якщо поляризація другого порядку проявляється тільки в кристалах без центру симетрії, то поляризація третього порядку в тій чи іншій мірі характерна для всіх оптичних матеріалів - як анізотропних, так і ізотропних. Поширення хвилі в кубічно нелінійної середовищі можна уявити як самовплив світла, коли показник заломлення середовища залежить від інтенсивності хвилі. В результаті може виникнути безліч незвичайних нелінійних ефектів (таких як самофокусування, фазова само- і крос-модуляція, освіту оптичних солітонів, вимушене розсіювання, звернення хвильового фронту, деполяризація випромінювання, оптична бистабильность

### 2.2.1. Механізми виникнення нелінійності третього порядку.

Поляризація третього порядку виражається через нелінійні сприйнятливості і поля наступним чином:

. (2.15)

Окремий випадок - самовплив світла з частотою описується поляризацією

, (2.16)

або, в більш компактній записи,

, (2.17)

де мається на увазі підсумовування по повторюваним індексам. Якщо відволіктися від тензорною природи діелектричної сприйнятливості, то сумарну поляризацію (лінійну і нелінійну) в цьому випадку можна представити у вигляді

. (2.18)

Діелектрична проникність і показник заломлення n визначаються матеріальним рівнянням, що зв'язує поля E, D, і P:

, (2.19)

звідки отримуємо, що проникність і показник заломлення отримують нелінійну добавку, пропорційну квадрату амплітуди електричного поля:

 (2.20)

де - лінійний показник заломлення, а кутові дужки означають усереднення по часовому інтервалу більшого періоду коливань світлової хвилі. Інтенсивність залежить від поля як, Тому.

 (2.21)

коефіцієнт прийнято вимірювати в одиницях СГСЕ. типове значення  в стѐклах становить . коефіцієнтчасто називають «нелінійним показником заломлення». Він має розмірність, обернену розмірності інтенсивності, т. Е. См2 / Вт. Практична формула для розрахунку нелінійної добавкидо показника заломлення:

. (2.22)

До зміни показника заломлення середовища під дією світла можуть приводити різні фізичні ефекти. Самий «швидкий» з них - електронна поляризація, пов'язаний з деформацією атомних орбіталей під дією електричного поля. У стѐклах більша частина (~ 80-90%) нелінійного показника заломлення пов'язана з електронною поляризацією, яка також часто називається оптичним ефектом Керра, за аналогією зі звичайним, електрооптичнихвластивостям ефектом Керра, квадратичним по полю. Поляризація обертанням в електричному полі молекул, що володіють дипольним моментом (орієнтаційна поляризація,) характерна для полярних рідин. Електрострикція - ефект стиснення матеріалу під дією поля (а показник заломлення, в свою чергу, залежить від щільності середовища).

Якщо частота світлової хвилі близька до однієї з резонансних частот середовища, то частина атомів або молекул середовища під впливом світла переходить в реальне возбуждѐнное стан. Поляризуемость атома в возбуждѐнном стані може бути іншою, ніж в основному, тому такий перерозподіл населѐнності може призводити до ефективного зміни показника заломлення. Зміна показника заломлення через нагрівання середовища після поглинання частини минулого випромінювання - самий «повільний» процес, проте приводить до найбільш значним фазовим спотворенням.

### 2.2.2. Теплова нелінійність

Розглянемо більш докладно зміна показника заломлення, пов'язане з нагріванням середовища проходять через неї лазерним випромінюванням. Для оцінки теплових ефектів поставимо таку модельну задачу: нехай круглий лазерний пучок діаметром 2R і інтенсивністю I (r) проходить через деяку середу, що володіє об'ємною теплоѐмкостьюі теплопровідністю κ. Циліндрична симетрія даного завдання дозволяє вважати зміну температури T залежать тільки від поперечного радіусу: T = T (r). Зміна температури описується рівнянням теплопровідності:

, (2.23)

де - коефіцієнт поглинання світла. Якщо світло лазера - безперервний, то це рівняння зводиться до стаціонарного рівняння теплопровідності:

. (2.24)

Теплова нелінійність - істотно нелокальний ефект: через теплопровідності температура змінюється не тільки в об'ѐме, де відбувається поглинання лазерного випромінювання, але і в сусідніх областях. Нагрівання середовища викликає відповідну зміну показника заломлення. У великому діапазоні зміни температури цю залежність можна вважати лінійною:

, (2.25)

де - коефіцієнт температурної залежності показника заломлення. Він може бути як позитивним, так і негативним. Для більшості речовин в конденсованому стані він не перевищує величини (По абсолютній величині) .Для того, щоб оцінити по порядку величини максимальна зміна температури  в центрі пучка (при безперервному випромінюванні), замінимо  на -Tmax / R2, і з (6.10) отримаємо,

. (2.26)

Зміна показника заломлення в цьому випадку дорівнює

, (2.27)

а нелінійний теплової коефіцієнт  (З рівності ) дорівнює

 (2.28)

Теплова нелінійність - головне джерело нелінійних фазових спотворень в безперервних лазерах.

### 2.2.3. Великомасштабне самофокусування

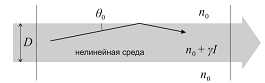
Нехай круглий лазерний пучок з рівномірним розподілом інтенсивності *I* поширюється через кубічно-нелінійну середу (рис. 2.4). якщо , То показник заломлення середовища всередині пучка буде більше, ніж поза ним, і пучок виявиться в свого роду нелінійному световоде. З умови повного внутрішнього відображення променя, що поширюється під дифракційним кутом від кордону цього світловода, можна вивести умова збереження діаметра пучка :,

, (2.30)

а оскільки , Отримаємо вираз для критичної потужності самофокусування :

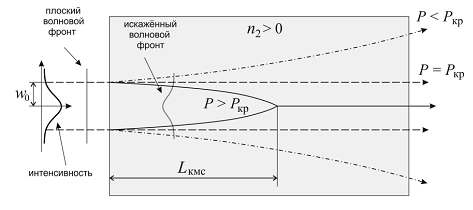
. (2.31)

Те-є, поведінка пучка в нелінійної середовищі визначається не інтенсивністю, а потужністю: якщо потужність менше критичної, то дифракція сильніше самофокусування, і пучок розходиться. Навпаки, якщо, То пучок лавиноподібно «схлопується» до осі, поки інтенсивність в його центрі не перевищить поріг руйнування оптичного середовища або поріг вимушеного розсіювання. Якщо ж потужність дорівнює критичної, то діаметр пучка остаѐтся незмінним - відбувається самоканалізація випромінювання.



Мал. 2.4 - Нелінійний хвилевід.

Розглянемо процес самофокусування з точки зору деформації хвильового фронту, на прикладі гауссова пучка. Нехай гаусів пучок з плоским хвильовим фронтом падає на кордон нелінійного середовища (рис. 2.5). Інтенсивність в центрі пучка більше, ніж на краях, тому, якщо, Показник заломлення збільшується від краѐв центру, і центральна частина пучка буде відставати по фазі в порівнянні з периферією. Хвильовий фронт придбає увігнуту форму, а оскільки локально світло поширюється в напрямку, перпендикулярному хвильовому фронту, пучок буде сходитися до осі.



Малюнок 2.5 - Самофокусування гауссова пучка.

Можна показати, що критична потужність в разі гауссова пучка дорівнює :,

, (2.32)

а відстань , На якому пучок схлопивается в точку (довжина самофокусування), так само

. (2.33)

Якщо довжина нелінійного середовища L менше , То фокусування відбувається поза середовищем (зовнішня самофокусування), а ефективне фокусна відстань такої тонкої лінзи одно

. (2.34)

Формули (2.33) - (2.34) наближено справедливі при невеликому перевищенні потужності над критичною. Якщо ж , То картина великомасштабної самофокусування ускладнюється: різні частини пучка можуть сфокусуватися на різній відстані - виникає багатофокусного самофокусування. Якщо лазерне випромінювання - імпульсна, і його потужність змінюється протягом імпульсу, то в результаті самофокусування утворюються рухомі фокуси. прихвильовий фронт пучка навпаки, набуває опуклу форму, і розбіжність збільшується в порівнянні з дифракційної - відбувається дефокусування випромінювання. Зазвичай, дефокусування буває в рідинах при тепловій нелінійності - зменшення показника заломлення в цьому випадку обумовлено нагріванням середовища під дією лазерного випромінювання. У загальному вигляді поведінку пучка безперервного світла з комплексною амплітудою *A (r),* з урахуванням дифракції та нелінійного самовпливу, описується стаціонарним нелінійним параксіальної хвильовим рівнянням:

, (2.35)

де . Це рівняння легко вивести (в наближенні повільно мінливих амплітуд) із загального хвильового рівняння, враховуючи, що

Зовнішня самофокусування часто використовується для пасивної синхронізації мод лазерів з ультракороткою тривалістю імпульсу. Ще одне застосування нелінійної рефракції - оптичне обмеження потужності лазерного випромінювання. Ефект самофокусування був теоретично передбачений Г. А. Аскарьяном в 1962 р, а експериментально вперше спостерігався Н. Ф. Пилипецької і С. Р. Рустамова в 1965 р їх дослідах були зареєстровані вузькі світяться нитки в органічних рідинах, що опромінюються сфокусованим пучком рубінового лазера.

# Розділ 3.САМОВПЛИВ СВІТЛОВИХ ХВИЛЬ.

## 3.1.Самофокусування випромінювання в нелінійному середовищі.

### 3.1.1. Нелінійне квазіоптичне рівняння.

Нехай електромагнітне поле поширюється в середовищі з діелектричної проникністю, що залежить від величини поля за законом:

 (3.1)

(Випадок так званої керровської нелінійності). Для спрощення ми відволікаємося від тензорних властивостей діелектричної проникності і ефектів поляризації поля. Нелінійна добавкапередбачається малою. Вважаємо також, що під час відсутності поля середа просторово однорідна, тобто

Виходячи з рівнянь Максвелла, вважаючи  і виключаючи магнітне поле, можна отримати хвильове рівняння для електричного поля:

 (3.2)

Будемо шукати рішення рівняння (2) в параксіальному наближенні у вигляді хвилі, що розповсюджується вздовж осі z:

, (3.3)

де - одиничний вектор поляризації хвилі. Хвильовий вектор *k* і частота пов'язані співвідношенням . Вплив діелектричної проникності ми врахуємо за допомогою модулюючої функції .

Підставляючи (3) в (2), отримаємо

 (3.4)

тут  - лапласіан в площині , Перпендикулярній до напрямку поширення пучка z. Будемо розглядати вузькі пучки, ефективна ширина яких *а* мала в порівнянні з характерною довжиною вздовж осі *z*, на якій амплітуда  істотно змінюється завдяки нелінійності:

 (3.5)

У наближенні параксіальної пучків з урахуванням нерівностей (5) в рівнянні (4) можна знехтувати похідною в порівнянні з іншими складовими. Це дає рівняння

, (3.6)

де явно врахована залежність (1) діелектричної проникності від напруженості поля. При записі цього рівняння ми врахували, що амплітуда  є комплексною, так що величину слід записувати у вигляді , чому відповідає усереднення по періоду коливань 

Параболічне рівняння (6) є основним при вивченні самофокусування вузьких пучків випромінювання. Це є двовимірне нелінійне рівняння Шредінгера.

### 3.1.2.Ейкональне наближення для квазіоптичного рівняння.

Для спрощення рівняння (6) будемо шукати його рішення у вигляді

 (3.7)

де- добавка до фази, що виникає через деформацію хвильового фронту в нелінійній середовищі. амплітуда і фаза в (3.7) передбачаються дійсними. Підставляючи (3.7) в (3.6) і відокремлюючи дійсну і уявну частини, отримаємо систему двох рівнянь:

**, (3.8а)

 (3.8б)

введемо вектор

. (3.9)

Цей вектор лежить в площині  і дає проекцію напрямку поширення променя на площину  (фактично  - це тангенс кута нахилу хвильового вектора променя до осі z:). Тоді, застосовуючи до рівняння (8а) оператор, Перепишемо це рівняння у вигляді

 (3.10)

Тут ми перейшли від амплітуди поля  до інтенсивності  і ввели параметр . З урахуванням сказаного рівняння (8б) приймає наступний вигляд:

 (3.11)

Далі ми обмежимося тільки випадком осесиметричних пучків. Введемо циліндричні координати. тоді вектор має тільки радіальну компоненту , Причому всі величини можуть залежати тільки від і z. З урахуванням цього перепишемо вихідну систему у вигляді

, (3.12а)

 (3.12б)

### 3.1.3.Самофокусування параболічних пучків.

Розглянемо спочатку межу геометричній оптики. Йому відповідають великі значення хвильового числа , Що дозволяє знехтувати останнім доданком в рівнянні (12а). Для справедливості такого наближення необхідно, щоб діаметр пучка був великий у порівнянні з довжиною хвилі. Крім того, з розгляду повинні бути виключені особливі точки і області перетину променів (каустики). У цій межі рівняння (12) приймають вид

, (3.13а)

 (3.13б)

Нехай пучок випромінювання, що потрапляє в нелінійну середу, має максимум інтенсивності на осі:

 (3.14)

Приймемо також, що на вході в середу цей пучок є плоскопаралельним, тобто

 (3.15)

Система рівнянь (3.13) з граничними умовами (3.14), (3.15) допускає автомодельного рішення:

 (3.16)

в якому, згідно з (14), (15) функції  задовольняють початковим умовам

 (3.17)

Підставляючи (3.16) в (3.13) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях , Приходимо до системи звичайних диференціальних рівнянь:

 (3.18)

Виключаючи з перших двох рівнянь змінну і інтегруючи вийшло рівняння, знайдемо зв'язок функцій  і :

 (3.19)

де враховані початкові умови (3.17). З цих же рівнянь легко встановлюється зв'язок

 (3.20)

З урахуванням (3.19), (3.20) останнє рівняння в (3.18) приводиться до вигляду

 (3.21)

Початкові умови для цього рівняння випливають з рівності (16), (20):

 (3.22)

Рішення рівняння (3.21) з умовами (3.22) має вигляд

 (3.23)

Таким чином, пучок сходиться на відстані , Яке можна назвати фокусною відстанню нелінійної лінзи. Інтенсивність випромінювання на осі пучка змінюється, відповідно до (3.16), (3.19), (3.23), згідно із законом

. (3.24)

В рамках використаних наближень інтенсивність зростає до нескінченності в міру наближення до фокусу. Зауважимо також, що в даній моделі самофокусування починається при будь-якому початковому значенні інтенсивності пучка .

### 3.1.4. Вплив дифракції на самофокусування випромінювання.

Врахуємо тепер дифракційні ефекти. Для цього будемо шукати рішення рівнянь (3.12) в автомодельної формі

 (3.25а)

. (3.25б)

При підстановці цього рішення в рівняння (3.12) слід мати на увазі, що через наявність одночасно нелінійного і дифракційного доданків ні гаусів, ні параболічний профілі не задовольняють ці рівнянням точно. Тому таке рішення є наближено автомодельного.

Підставляючи вирази (3.25) в рівняння (3.12а), провівши розкладання за ступенями  і обмежуючись лінійними по  складовими, отримаємо рівняння

 (3.26а)

Друге рівняння випливає з (3.12б):

 (3.26б)

Виключаючи з (3.26а), (3.26б) функцію , Отримаємо остаточне рівняння для радіуса пучка:

 (3.27а)

Це рівняння має бути доповнене початковими умовами. Якщо на середу падає плоскопараллельний пучок випромінювання (), То

 (3.27б)

Нехай нелінійність слабка. Тоді пучок починає розходитися завдяки дифракції: Якщо ж нелінійність велика, то дифракційна розбіжність пригнічується і починається самофокусування: гранична ситуація  визначає граничне умова самофокусування:. В явному вигляді ця умова записується таким чином:

 (3.28)

де . Таким чином, самофокусування починається, якщо, незалежно від радіуса пучка, потужність випромінювання перевищує критичне значення. При цьому дифракція вже не в змозі придушити самосжатія пучка.

Розглянута модель не дозволяє знайти мінімальний радіус , До якого відбувається стиснення пучка внаслідок самофокусування. Відповідне обмеження виникає завдяки тому, що діелектрична проникність перестає рости при напруженості поля випромінювання, порівнянного з величиною поля в атомах.

## 3.2. Чисельне моделювання ефекту савмовпливу пучка лазера

### 3.2.1 Чисельне рішення нелінійного рівняння Шредінгера в радіально-симетричному випадку.

Як відомо, нелінійне рівняння Шредінгера є окремим випадком хвильового рівняння в параболічному наближенні, записаному з урахуванням ефекту самовпливу. Ефект самовпливу проявляється при поширенні оптичного випромінювання в середовищах з кубічного нелінійністью (поляризація пропорційна напруженості електричного поля третього ступеня).

З урахуванням цього ефекту рівняння Шредінгера в радіально-симетричному випадку запишеться як:

 (3.1)



де - оператор Лапласа в радіально-симетричному випадку.

*U* - напруженість електричного поля,

*k* - хвильовий вектор,

** - показник заломлення середовища,

** - зміна показника заломлення під дією поля хвилі, що розповсюджується

Рівняння (1) необхідно доповнити граничним і початковим умовами:

 (3.2)

функціяописує напруженість електричного поля хвилі на вході в середу (хвилевід), а нульові граничні умови показують, що середовище (хвилевід) обмежені провідною оболонкою. Без урахування нелінійних ефектів рівняння Шредінгера набуває вигляду:

 (3.3)

Надалі рівняння (1) будемо називати нелінійним рівнянням Шредінгера, а рівняння (3) - лінійним рівнянням.

Для чисельного рішення системи (1) - (2) побудуємо консервативну різницеву схему [2]. визначимо сітку:



де- кроки по змінної *z*, яка описує напрямок поширення хвилі, і по радіальної змінної відповідно. Оператор Лапласа по змінної *r* аппроксимуем наступним різницевим оператором [3]:



причому для досить гладкої функції A. Задачі (3.1) - (3.2) поставимо у відповідність наступну двошарову нелінійну різнісну схему:



Система різницевих рівнянь (4) є нелінійною. Для знаходження невідомої функції можна використовувати ітераційний метод послідовних наближень в поєднанні з різницевим прогоном по *r*.

Необхідно також відзначити, що, так як дана схема є консервативною, вона - аналог інтегральної форми закону збереження електромагнітної енергії в середовищі.

### 3.2.2. Самофокусування пучка

На рис. 3.1-3.2 наведено результати чисельного рішення нелінійного рівняння Шредінгера з наступними параметрами:

*R*= 50 мкм;

 мкм, причому ;

, причому.

В роботі показано, що при  виникає фокусування пучка на відстані:

 від входу в нелінійну середу.



Мал. 3.1 Розподіл інтенсивності хвилі на відстані L від входу в середу.

Підставляючи експериментальні значення параметрів, отримуємо, що. Обчислювальні експерименти (рис. 1-3) показують, що фокусування пучка відбувається на відстані близько 800-900 мкм. Таким чином, результати чисельного рішення досить близькі до теоретичних оцінок, що ще раз підтверджує практичну придатність обраної різницевої схеми.



Рис.3.2 Розподіл інтенсивності хвилі на відстані L від входу в середу ().



Мал. 3.3 Розподіл інтенсивності хвилі на відстані L від входу в середу.

### 3.2.3. Самодефокусування пучка

На рис. 1-2 наведені результати чисельного рішення нелінійного рівняння Шредінгера з наступними параметрами:

R = 50 мкм;

 мкм, причому ;

, причому.

****

Мал. 3.4 Розподіл інтенсивності хвилі на відстані L від входу в середу.

****

Мал. 3.5 Розподіл інтенсивності хвилі на відстані L від входу в середу.

В роботі показано, що при виникає самодефокусування в нелінійної середовищі, тобто зрушення енергії пучка в периферійну зону. Наведені вище графіки чисельного моделювання демонструють цей факт.

# ВИСНОВКИ

Проведені дослідження підтвердили високу точність чисельного рішення задачі на відстанях порядку міліметра. Так для моделі середовища, що не враховує ефект самовпливу, чисельне рішення практично збігається з аналітичним.

Для середовища з "параболічним профілем" заломлення моди Гаусса-Ерміта, практично не зазнають змін у процесі поширення хвилі на відстані порядку десятків міліметрів, що відповідає теорії .

Для моделі середовища, що враховує ефект самовпливу, чисельний розрахунок, що був проведений у роботі, дозволяє спостерігати як явище самофокусування випромінювання, так і його самодефокусування, що спрогнозовано теоретичними оцінками проведеними у роботі.

# Список використаних джерел

1. Шен І. Р., "Принципи нелінійної оптики": Пер. з англ. / І. Р Шен // Під ред. С. А. Ахманова, 1989.
2. Ярів А. "Квантова електроніка": Пер. з англ. / А. Ярів // Під ред. Я. І. Ханіна 1980.
3. Бломберген Н. "Нелінійна оптика" 1966.
4. Зельдович Б. Я., "Звернення хвильового фронту" / Зельдович Б. Я., Пилипецької Н. Ф., Шкунов В. В. тисяча дев'ятсот вісімдесят п'ять.
5. Беспалов В. І., "Нелінійна оптика і адаптивні лазерні системи" / Беспалов В. І., Пасманік Г. А. 1986.
6. Ахманов С. А., "Введення в статистичну радіофізику і оптику" / Ахманов С. А., Дьяков Ю. Є., Чиркин А. С. тисяча дев'ятсот вісімдесят один.
7. Сізмін Д.В. Нелінійна оптика. Навчально-методичне пособіе.СарФТІ, Саров, 2015.-147 с.
8. . Додд Р. Солітони і нелінійні хвильові рівняння. / Додд Р., Ейлбек Дж., Гібон Дж., Морріс Х. // М .: Мир, 1988. 694 с.
9. Агравал Г. Нелінійна волоконна оптика. М .: Світ, 1996. 323 с.
10. Самарський А.А. Теорія різницевих схем // М., Наука. 1977.
11. .Карамзін Ю.М., Математичне моделювання в нелінійній оптиці / Карамзін Ю.М., Сухоруков А.П., Трофимов В.А .// М., Изд-во Моск. ун-ту. 1989.
12. Mollenauer LF, Stolen RH and Gordon JP Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers // Phys.Rev.Letts. 1980. V. 45. P. 1095-1098.