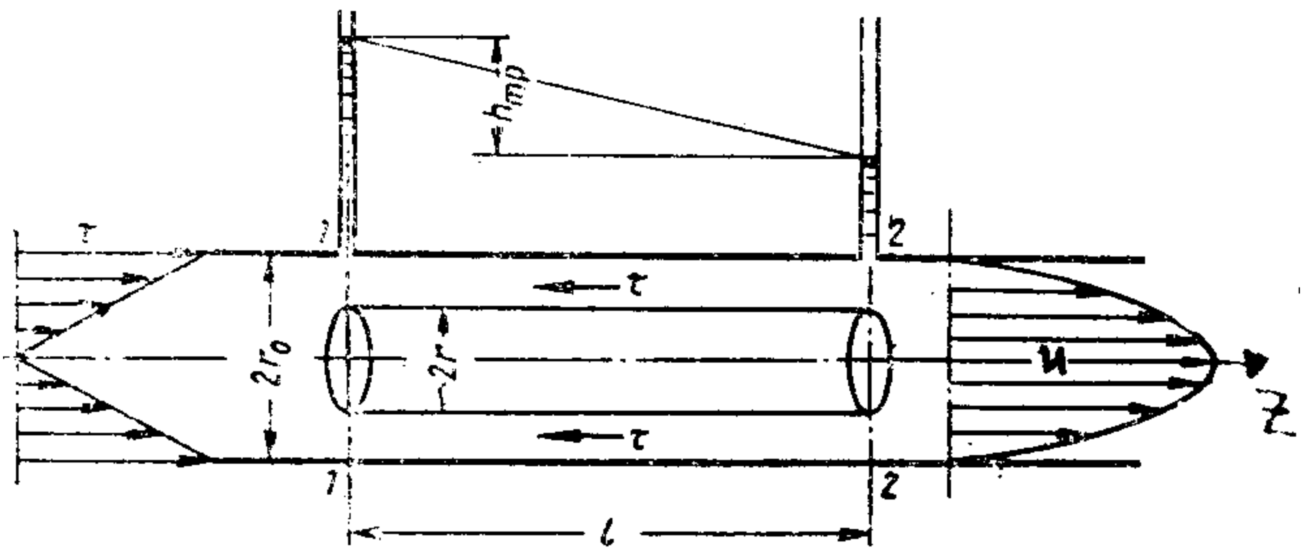
ЛЕКЦИЯ 7

2.5. Ламинарное течение жидкости в цилиндрической трубе.

Как указывалось выше, ламинарное течение является строго упорядоченным, слоистым течением без перемешивания жидкости. Теория ламинарного течения базируется на законе трения Ньютона $\tau = \mu \frac{du}{dy}$. Это трение между слоями движущейся жидкости является единственным источником потерь напора в данном случае.



Рассмотрим установившееся ламинарное течение жидкости в прямолинейной круглой трубе с внутренним диаметром $d=2r$. Пусть труба расположена горизонтально, тогда влиянием силы тяжести можно пренебречь. Достаточно далеко от входа в нее (там, где поток уже стабилизировался) выделим отрезок длиной l между сечениями *1-1* и *2-2*. Пусть в сечении *1-1* давление равно p_1, а в сечении *2-2* – p_2. Ввиду постоянства диаметра трубы, скорость жидкости будет постоянной, а коэффициент кинетической энергии α будет неизменным вдоль потока вследствие его стабильности, суммарные потери напора – потери только на трение, поэтому уравнение Бернулли для выбранных сечений примет вид:

$$\frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} + h_{тр}.$$

Отсюда

$$h_{тр} = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{p_{тр}}{\rho g},$$

что и показывают пьезометры, установленные в этих сечениях.

В потоке жидкости выделим цилиндрический объем радиусом r, соосный с трубой и имеющий основания в выбранных сечениях. Запишем уравнение равномерного движения выделенного объема жидкости в трубе, т.е. равенство нулю сил, действующих на выделенный объем: сил давления и сопротивления. Обозначая касательные напряжения на боковой поверхности цилиндра через τ, получим:

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 - 2\pi r l \tau = 0,$$

откуда

$$\tau = \frac{p_{тр} r}{2l}.$$

Из формулы следует, что касательные напряжения в поперечном сечении трубы изменяются по линейному закону в функции радиуса, как показано на рис. 2.6 и равны нулю по оси трубы. Поскольку эта формула выведена без учета характера режима течения жидкости в трубе, она справедлива как для ламинарного, так и для турбулентного течения.

Выразим касательные напряжения τ по закону трения Ньютона через динамическую вязкость и поперечный градиент скорости, при этом заменим расстояние от стенки (переменную y) текущим радиусом r:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} = -\mu \frac{du}{dr}.$$

(знак «-» показывает, что направление отсчета r от оси к стенке противоположно направлению отсчета y (от стенки).

Подставляя значение τ в предыдущее уравнение, получим:

$$\frac{p_{тр}\, r}{2l} = -\mu \frac{du}{dr}.$$

Тогда приращение скорости

$$du = -\frac{p_{тр}\, r}{2\mu l} dr.$$

(при положительном приращении радиуса получается отрицательное приращение скорости). Проинтегрируем это выражение:

$$u = -\frac{p_{тр}}{2\mu l}\frac{r^2}{2} + C.$$

Постоянную интегрирования найдем из граничных условий, на стенке при $r = r_0,\ u = 0$ (условие прилипания):

$$C = \frac{p_{тр} r^2}{4\mu l}.$$

Скорость на расстоянии r от оси:

$$u = \frac{p_{тр}\left(r_0^2 - r^2\right)}{4\mu l}. \qquad (2.18)$$

Это выражение является законом распределения скоростей по сечению круглой трубы при ламинарном режиме течения. Эпюра скорости представляет собой параболу второй степени (рис.2.6).

Максимальная скорость в центре сечения (при r=0),

$$u_{\max} = \frac{p_{тр} r_0^2}{4\mu l}. \qquad (2.19)$$

Найдем расход жидкости при таком распределении скорости. Элементарный расход:

$$dQ = u\, dS.$$

(здесь скорость определяется формулой 2.18, а элементарную площадку dS целесообразно взять в виде кольца радиусом r и шириной dr), тогда

$$dQ = \frac{p_{тр}\left(r_0^2 - r^2\right)}{4\mu l} 2\pi r dr /$$

После интегрирования по всей площади поперечного сечения, т.е. от r=0 до $r = r_0$, получим:

$$Q = \frac{\pi\, p_{тр}}{2\mu l}\int_0^{r_0}\left(r_0^2 - r^2\right) r dr = \frac{\pi\, p_{тр}}{8\mu l} r_0^4 . \qquad (2.20)$$

Найдем среднюю скорость:

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi r_0^2} = \frac{p_{тр} r_0^2}{8\mu l} . \qquad (2.22)$$

Сравнивая (2.21) и (2.19), находим , что при ламинарном течении средняя скорость в два раза меньше максимальной, т.е. $v = \frac{u_{\max}}{2}$.

Найдем потери напора на трение $h_{тр}$, для этого выразим из формулы (2.20) $p_{тр}$, разделим все выражение на ρg , заменим $\mu=\rho\nu$ и $d=2r_0$, получим:

$$h_{тр} = \frac{128\nu l Q}{\pi g d^4} . \qquad (2.23)$$

Полученный закон сопротивления получил название *закона Пуазейля* и показывает, что при ламинарном течении в трубе круглого сечения потери напора на трение пропорциональны расходу и вязкости в первой степени и обратно пропорциональны диаметру в четвертой степени.

Приведем полученный закон сопротивления к ранее выведенной формуле Дарси – Вейсбаха.

$$h_{тр} = \frac{128\nu l Q}{\pi g d^4} = \frac{64\nu}{v d}\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} = \frac{64}{\mathrm{Re}}\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{l}{d}\frac{v^2}{2g},$$

где

$$\lambda = \frac{64}{\mathrm{Re}} \qquad (2.24)$$

Потери напора на трение при ламинарном режиме пропорциональны средней скорости в первой степени (так как в формуле 2.24. число Рейнольдса, в которое входит средняя скорость, находится в знаменателе). Данное значение коэффициента гидравлического сопротивления на трение хорошо согласуется с опытными и служит в качестве основного при практических расчетах

Зная закон распределения скорости по сечению трубы, легко определить коэффициент Кориолиса α для ламинарного режима течения в круглой трубе. По формуле (1.21), учитывая выражения (2.18) и (2.22) и то, что $S = \pi r_0^2$ и $dS = 2\pi rdr$, получим:

$$\alpha = \frac{\int_S u^3 dS}{v^3 S} = 16\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)\frac{rdr}{r_0^2}.$$

Обозначим $z = 1 - \dfrac{r^2}{r_0^2}$, тогда

$$\alpha = -8\int_0^1 z^3 dz = 2\left|z^4\right|_0^1 = 2. \qquad (2.25)$$

Итак, действительная кинетическая энергия ламинарного потока с параболическим распределением скорости в два раза превышает кинетическую энергию того же потока, но при равномерном распределении скорости.

Изложенная теория ламинарного течения жидкости в круглой трубе хорошо согласуется с опытами и не нуждается в поправках за исключением следующих случаев:

1. течение в начальном сечении трубы;
2. течение с теплообменом;
3. течение в капиллярах и зазорах с облитерацией;
4. течение с большими перепадами давлений,