ЛЕКЦИЯ 4

СИЛЫ ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА ПОВЕРХНОСТИ

Одной из практически важных задач в гидростатике является определение сил, действующих со стороны жидкости на различные поверхности, задачи о теории плавания и остойчивости судов и многие другие задачи.

3.1. Сила давления жидкости на плоскую горизонтальную поверхность.

. Действие сил гидростатического давления, распределенного по поверхности, которая это давление воспринимает, может быть заменено действием одной сосредоточенной силы — их равнодействующей.

При определении силового воздействия жидкости на твердую поверхность решают обычно две задачи: определяют величину равнодействующей сил гидростатического давления и находят точку ее приложения (центр давления).

Рассмотрим сначала простейший случай — давление жидкости на плоское дно цилиндрического сосуда (рис. 3.1). Выделим в пределах площади дна элементарную площадку $d\omega$; очевидно, что давление в каждой ее очке будет постоянным. Сила давления dP на эту площадку равна: $dP = p\,d\omega$,

где $p = p_0 + \rho g h$ — полное гидростатическое давление в любой точке площади дна.

Равнодействующая сила давления, определится интегралом от элементарной силы, взятым по всей площади дна:

$$P = \int_{\omega} dP = \int_{\omega} p d\omega = (p_0 + \rho g h)\omega \qquad (3.1)$$

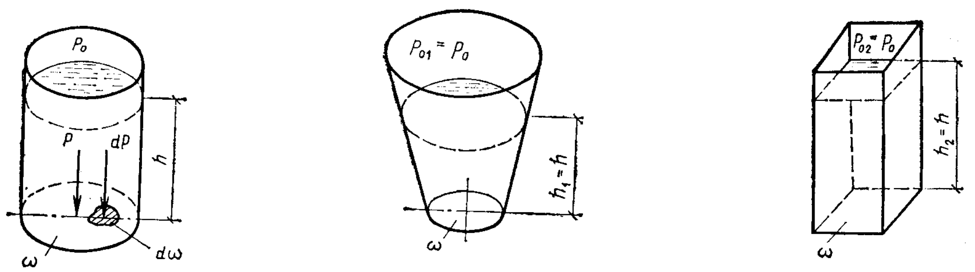


Рис.3.1. Сила давления жидкости на дно сосуда

Уравнение (3.1) показывает, что независимо от формы сосуда, заполненного жидкостью, и формы его дна (рис.3.1,б,в) сила гидростатического давления будет одинаковой, если давления на свободной поверхности и высоты жидкости в сосудах будут одинаковы, т.е.:

$$p_0 = p_{01} = p_{02} \quad \text{и} \quad h = h_1 = h_2$$

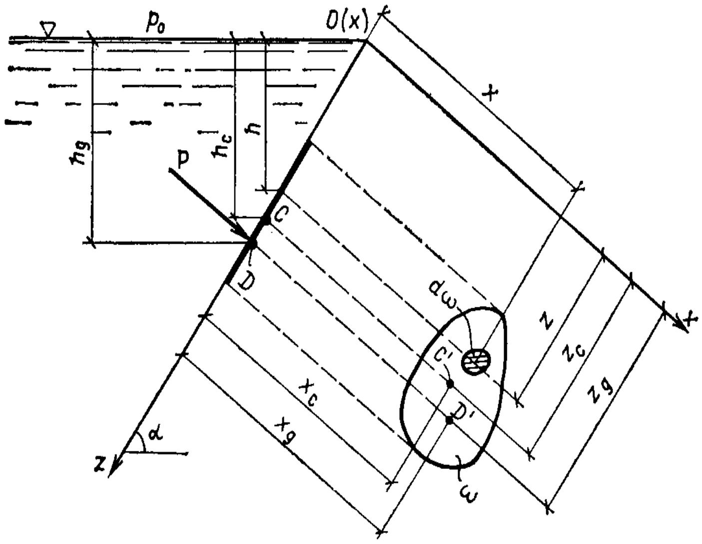
Таким образом, сила давления на дно сосуда не зависит от его формы, а зависит только от глубины жидкости в сосуде и площади дна. Это положение, открытое в 17 веке Паскалем, носит в гидравлике название «гидростатического парадокса». Это явление находит применение тогда, когда необходимо создать большие давления с помощью малых количеств воды. Например, для опробования цистерн на прочность к ним подводят напорные трубки. Налив воду в цистерну и добавив в трубки незначительное количество жидкости, можно значительно повысить давление на стенки и дно цистерны, доводя его при определенных значения уровня жидкости в трубках до расчетных.

В случае равномерно распределенной нагрузки на дно сосуда точка приложения равнодействующей и центр тяжести площадки совпадают.

3.2. Сила давления жидкости на наклонную плоскую поверхность.

Пусть жидкость находится в сосуде с плоской боковой стенкой, расположенную в общем случае под произвольным углом α к горизонту (рис.3.2). Найдем силу гидростатического давления на площадку ω, лежащую в плоскости стенки. Ось координат $0z$ расположена вдоль рассматриваемой стенки; ось Ox совпадает с линией пересечения плоскости свободной поверхности с плоскостью стенки и располагается перпендикулярно плоскости чертежа. Для наглядности развернем плоскость стенки вместе с расположенной на ней площадкой ω на 90^0 до совпадения ее с плоскостью чертежа, в этом случае ось $0x$ будет направлена слева направо под прямым углом к оси Oz.

В пределах площадки ω выберем бесконечно малую площадку $d\omega$, находящуюся на произвольной глубине h от свободной поверхности и на произвольном расстоянии x от оси *Ог.* Введем обозначения: h_c и $h_д$ — глубина погружения центра тяжести площадки и точки приложения равнодействующей силы гидростатического давления на площадку ω; x_c и $x_д$ — расстояния от точек C' и D' до оси *Ог;* z_C и $z_д$ — расстояния от точек C и D вдоль рассматриваемой плоскости до свободной поверхности.



Определим силу полного гидростатического давления на элементарную площадку $d\omega$:

$$dP = pd\omega = (p_0 + \rho gh)d\omega$$

Равнодействующая силы давления будет равна:

$$P = \int_\omega pd\omega = \int_\omega (p_0 + \rho gh)d\omega$$

или

$$P = \int_\omega p_0 d\omega + \int_\omega \rho ghd\omega \qquad (3.2)$$

Так как давление на свободной поверхности p_0 величина постоянная, первый интеграл в уравнении (3.2)

$$P = \int_\omega p_0 d\omega = p_0\omega$$

Рассмотрим второй интеграл уравнения (3.2). Из рис. 3.2 видно, что

$h = z\sin\alpha$, поэтому $\int_\omega \rho ghd\omega = \rho g\sin\alpha\int_\omega zd\omega$.

Интеграл $\int\limits_{\omega} z d\omega$ представляет собой статический момент площадки ω относительно оси Ox, т.е. $\int\limits_{\omega} z d\omega = S_{\omega,0x}$ поэтому:

$$\rho g \sin\alpha \int\limits_{\omega} z d\omega = \rho g \sin\alpha S_{\omega,0x} = \rho g \sin\alpha z_{c\omega}$$

или

$$\int\limits_{\omega} \rho g h d\omega = \rho g h_c \omega$$

Подставив значения интегралов в формулу (3.2) для определения равнодействующей силы давления, получим:

$$P = p_0\omega + \rho g h_c \omega$$

или окончательно

$$P = (p_0 + \rho g h_c)\omega \tag{3.3}$$

Таким образом, *сила давления на плоскую произвольно ориентированную поверхность равна произведению полного (избыточного) давления в центре тяжести рассматриваемой площадки на площадь самой площадки.*

Определим теперь координаты точки приложения силы гидростатического давления (эта точка называется *центром давления*). Ранее указывалось, что в жидкости возможны лишь распределенные силы, поэтому центры давления нужно рассматривать лишь условно.

Представим силу гидростатического давления в виде суммы двух величин: силы внешнего давления (или давления на поверхности жидкости) $P_0 = p_0\omega$ и силы давления от веса жидкости $P_ж = \rho g h_c \omega$. Очевидно, центром давления будет точка приложения равнодействующих этих сил, определяемая в соответствии с общими законами механики как центр действия параллельных сил.

Так как давление p_0 равномерно распределено по всей площадке со и его величина остается постоянной, точка приложения силы P_0 совпадает с центром тяжести рассматриваемой площадки. Определим координаты точки приложения силы $P_ж$.

Для нахождения точки приложения силы давления от веса жидкости $P_ж$ (точка D) применим теорему механики, согласно которой момент равнодействующей силы относительно оси $0x$ равен сумме моментов составляющих сил, т.е.

$$P_ж \cdot z_д = \int_\omega dP_ж \cdot z$$

где $z_д$ – координата точки приложения силы

$$z_д = \int_\omega \frac{dP\,z}{P_ж} = \int \frac{dP\,z}{\rho\, g\, h_c\, \omega}$$

Интеграл $\int_\omega dP\,z = \int_\omega \rho\, g\, h\, d\omega\, z = \rho\, g \sin\alpha \int_\omega z^2 d\omega = \rho\, g \sin\alpha\, J_x$

Где $J_x = \int_\omega z^2 d\omega$ -момент инерции площадки ω относительно оси $0x$

Учитывая, что $J_x = J_{x0} + z_c^2\,\omega$, получим:

$$z_д = z_c + \frac{J_{x0}}{z_c\,\omega} \qquad (3.4)$$

где J_{x0} - момент инерции площадки ω относительно центральной оси, параллельной $0x$.

Таким образом, точка приложения сила $P_ж$ расположена ниже центра тяжести стенки и расстояние меду точками C и D равно:

$$e = \frac{J_{x0}}{z_c\,\omega}$$

Если давление на свободной поверхности p_0 равно атмосферному, то точка D и будет центром давления. При p_0 выше атмосферного центр давления находят по правилам механики как точку приложения равнодействующей двух сил: P_0 и $P_ж$; чем больше первая сила по сравнению со второй, тем, очевидно, центр давления ближе к центру тяжести.

3.3. Сила давления жидкости на криволинейную поверхность

Выберем внутри покоящейся жидкости произвольный объем W ограниченный поверхностью S (рис. 3.3). Очевидно, поверхностные силы (в данном случае только силы гидростатического давления) будут направлены по внутренним нормалям к граничной поверхности. Выделим в пределах поверхности S криволинейную площадку ω. Так как площадка ω находится в равновесии, система распределенных по ее поверхности сил dP может быть заменена одной равнодействующей P с составляющими P_x, P_y, P_z, параллельными соответствующим координатным осям Ox, Oy, Oz.

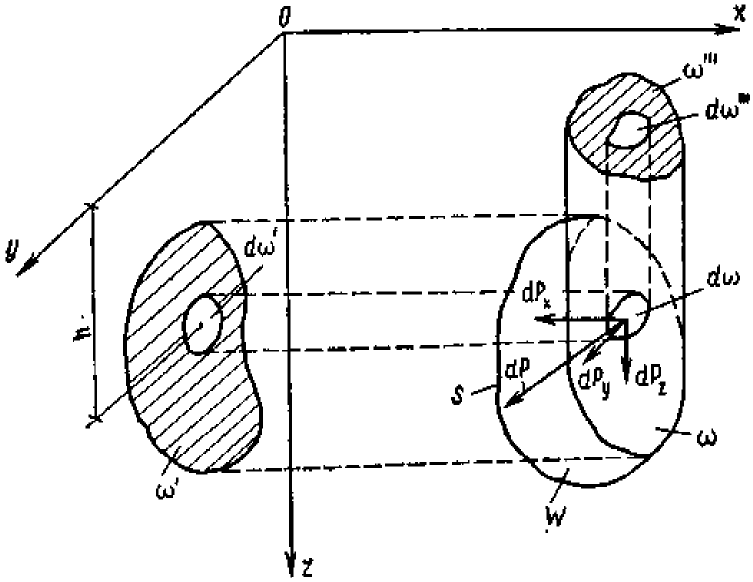


Рис. 3.3. К определению силы давления на криволинейную поверхность

Сила dP, действующая на площадку $d\omega$ (рис. 3.3), определится по формуле

$$dP = (p_0 + \rho g h) d\omega \qquad (3.5)$$

где h — глубина погружения центра тяжести площадки ω относительно свободной поверхности.

Так же как и равнодействующая P, элементарная сила давления может быть представлена в виде:

$$dP = \sqrt{dP_x^2 + dP_y^2 + dP_z^2}$$

где dP_x и dP_y — горизонтальные составляющие силы dP, действующие вдоль осей, параллельных осям Ox и Oy, $dP_г$ — вертикальная составляющая силы dP.

Определим каждую составляющую отдельно.

Рассмотрим сначала горизонтальную составляющую dP_X. Очевидно,

$$dP_x = dP\cos\left(d\vec{P}\hat{}0x\right),$$

где $\cos\left(d\vec{P}\hat{}0x\right)$—косинус угла между направлением вектора силы *dP* и осью *Ox*.

После подстановки в последнее уравнение значения силы *dP* получим:

$$dP_x = \left(p_0 + \rho g h\right) d\omega \cos\left(d\vec{P}\hat{}0x\right) \qquad (3.6)$$

Произведение $d\omega\cos\left(d\vec{P}\hat{}0x\right)$ представляет собой проекцию выделенной площадки $d\omega$ на плоскость, перпендикулярную направлению *Ox* (рис. 3.3). В нашем случае, это площадка $d\omega'$. Таким образом

$$dP_x = \left(p_0 + \rho g h\right) d\omega'$$

Горизонтальная составляющая силы P_x равна сумме всех элементарных сил dP_x, т. е.

$$P_x = \int_{\omega'} \left(p_0 + \rho\, g\, h\right) d\omega' \qquad (3.7)$$

Рассмотрим $\int_{\omega'} \left(p_0 + \rho\, g\, h\right) d\omega'$ как сумму двух интегралов:

$$\int_{\omega'} p_0\, d\omega' \quad \text{и} \quad \rho\, g \int_{\omega'} h\, d\omega'$$

Первый интеграл при постоянном давлении на свободной поверхности

$$\int_{\omega'} p_0\, d\omega' = p_0 \omega'$$

где ω' — проекция площадки ω на плоскость *yOг.*

Второй интеграл, как это видно из рис. 3.3, представляет собой статический момент площадки ω' относительно оси *Oy,* который как известно, равен произведению площади ω' и расстояния от ее центра тяжести до оси *Oy.* Тогда

$$\rho\, g \int_{\omega'} h\, d\omega' = \rho\, g\, h'_c \omega'$$

Для равновесия жидкости в поле силы тяжести поверхностями уровня являются горизонтальные плоскости, поэтому $h'_c = h_c$. Окончательно для горизонтальной составляющей можно записать:

$$P_x = \left(p_0 + \rho g h_c\right)\omega' \qquad (3.8)$$

Уравнение для горизонтальной составляющей, действующей вдоль оси *Oy,* легко записать по аналогии с выражением (3.8):

$$P_y = \left(p_0 + \rho g h_c\right)\omega''$$

где ω'' — проекция площадки ю на координатную плоскость *xOг*

Таким образом, горизонтальная составляющая силы полного гидростатического давления на криволинейную поверхность равна силе давления на проекцию этой поверхности на плоскость, нормальную направлению действия рассматриваемой составляющей.

Определим вертикальную составляющую силы полного давления P_z. Очевидно, P_z равна сумме всех элементарных вертикальных составляющих силы давления, т. е.

$$P_z = \int_\omega dP_z$$

где $dP_z = \left(p_0 + \rho g h\right) d\omega \cos\left(d\vec{P} \wedge Oz\right)$ — вертикальная составляющая силы полного давления на элементарную площадку $d\omega$;

$\cos\left(dP \wedge Oz\right)$ — косинус угла между направлением вектора *dP* и осью *Oг*

Так как $d\omega \cos\left(d\vec{P} \wedge Oz\right)$— проекция выделенной элементарной площадки *dω* на горизонтальную плоскость, $P_г$ по аналогии с предыдущим может быть представлена в виде:

$$P_z = \int_{\omega'''} p_0 \, d\omega''' + \int_{\omega'''} h \, d\omega''' \qquad (3.9)$$

Рассмотрим второй интеграл уравнения (3.9). Из рис.3.3. следует, что $\int_{\omega'''} h \, d\omega'''$ представляет собой объем, образованный рассматриваемой площадкой

ω, ее проекцией на горизонтальную плоскость, совпадающую со свободной поверхностью или с ее продолжением, и вертикальными образующими, проходящими через крайние точки рассматриваемой поверхности. Этот объем иногда называют телом давления (*Wт.д.*).

Окончательно для вертикальной составляющей можно записать:

$$P_z = p_0\,\omega''' + \rho\, g\, W_{т.д.} \qquad (3.10)$$

Следовательно, вертикальная составляющая силы полного гидростатического давления на криволинейную поверхность равна сумме силы внешнего давления p_0 на проекцию рассматриваемой площадки на свободную поверхность или на ее продолжение и силы, определяемой весом тела давления.

Давление на свободной поверхности p_0 можно заменить столбом жидкости, высота которого от свободной поверхности жидкости до пьезометрической плоскости равна:

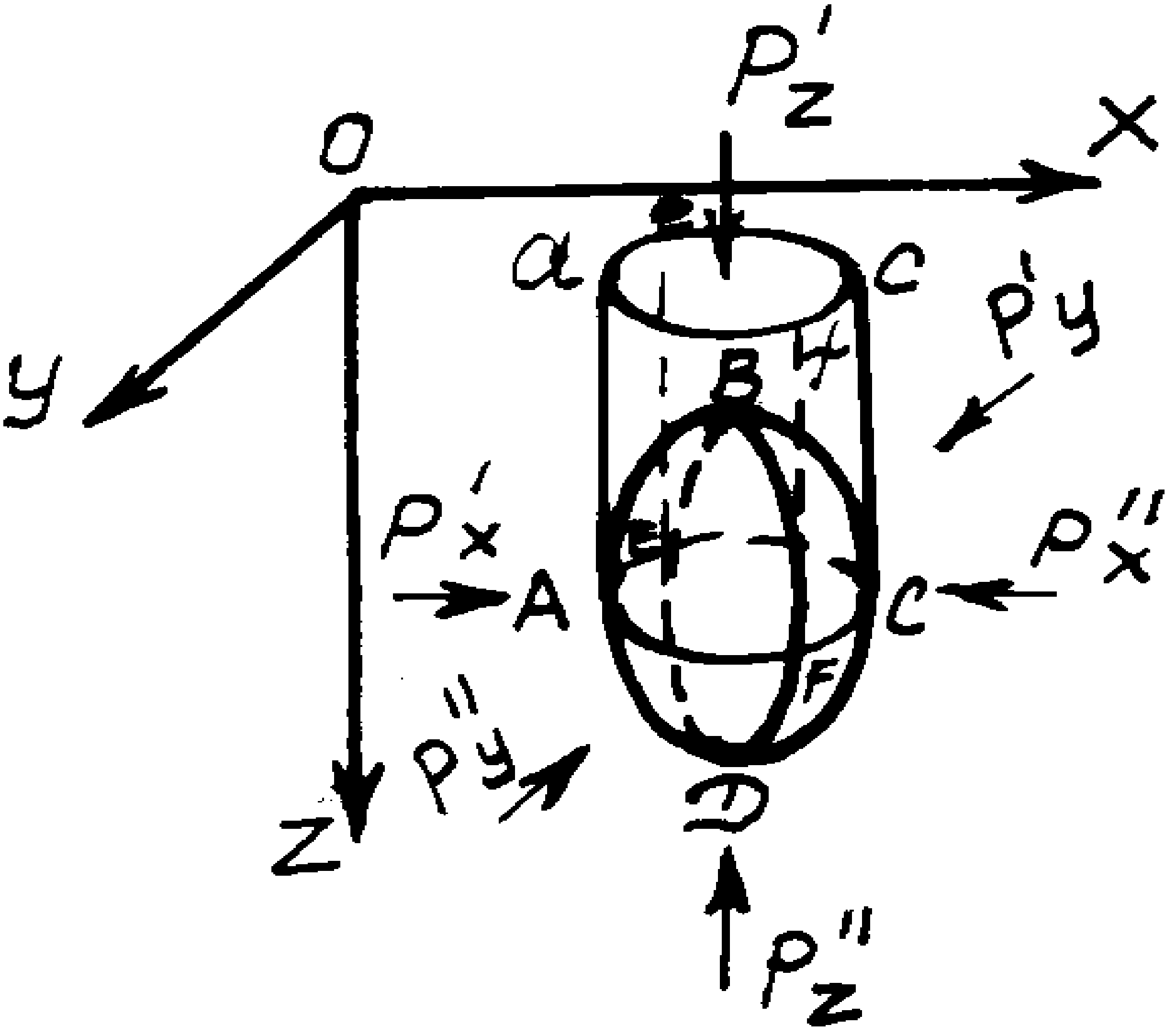
$$h_0 = \frac{p_0}{\rho\, g}$$

Тогда $W_{т.д.} = \int\limits_{\omega'''}(h + h_0)\,d\omega'''$ и вертикальная составляющая силы давления определится как:

$$P_z = \rho\, g\, W_{т.д.} \qquad (3.11)$$

3.4. Закон Архимеда. Плавание тел.

Рассмотрим полученные в предыдущем разделе соотношения для вывода одного из самых известных и основных законов – закона Архимеда. Рассмотрим тело ABCD произвольной формы объемом *W*, плотностью ρ_1, погруженное в покоящуюся жидкость, плотностью ρ (рис. 3.4). На это тело будут действовать силы гидростатического давления, направленные по нормали к поверхности, ограничивающей тело. Найдем составляющие силы давления по координатным осям



(оси *x и y* расположим в горизонтальной плоскости, ось *г* - направим по вертикали. Распределенные по поверхности силы для тела, находящегося в равновесии, могут быть заменены одной равнодействующей *P* с составляющими P_x, P_y и $P_г$. При этом (см. рис. 3.4) $P_x = P'_x - P''_x$, $P_y = P'_y - P''_y$, $P_z = P'_z - P''_z$. В соответствии с определением горизонтальной составляющей силы гидростатического давления легко показать, что составляющие P_x и P_y равны нулю.

В качестве примера рассмотрим горизонтальную составляющую, действующую вдоль оси *Ox.* Силы P'_x и P''_x, определяющие ее величину, равны, поскольку поверхности, на которые они действуют, имеют одну и ту же проекцию BFDE на вертикальную плоскость. Поэтому их разность равна нулю. По той же причине и $P_y = 0$. Таким образом, на погруженное твердое тело действуют только две силы: $P'_г$ — сила давления на поверхность AECFB и P'' — сила давления на поверхность AECFD. Эти силы соответственно будут:

$$P'_z = \rho\, g W_{AacCB};\ \ P''_z = \rho\, g W_{AacCD}$$

Разность этих сил и является равнодействующей сил гидростатического давления на погруженное тело:

$$P_z = \rho\, g\left(W_{AacCB} - W_{AacCD}\right) = -\rho\, g W_{ABCD} \qquad (3.12)$$

Уравнение (3.12) выражает закон, установленный за 250 лет до нашей эры Архимедом и известный под названием закона Архимеда: на твердое тело, погруженное в покоящуюся жидкость, действует сила гидростатического давления, равная весу жидкости в объеме тела, направленная вертикально вверх и проходящая через центр тяжести тела. Знак « - » показывает, что сила направлена вверх. Силу P_z часто называют выталкивающей или архимедовай силой.

Приведем здесь некоторые формулировки этого закона:

1. *Всякое тело, погруженное в жидкость, теряет в весе столько, сколько весит вытесненная им жидкость.*
2. *На тіло, занурене у рідину, діє виштовхувальна сила, яка дорівнює вазі рідини, витісненої тілом.*

Из закона Архимеда следует, что на тело, погруженное в жидкость, в конечном счете действуют две силы: сила тяжести (вес тела) G и архимедова выталкивающая сила P_a. При этом могут иметь место три основных случая:

1. Плотность тела ρ_1 и жидкости ρ одинаковы ($\rho_1 = \rho$).

   Тогда: $G = \rho_1\, g W = P_a = \rho\, g W$. Равнодействующая этих сил равна 0. Следовательно, тело будет находиться в состоянии безразличного равновесия.

2. Плотность тела больше плотности жидкости ($\rho_1 > \rho$)

   Следовательно, вес тела больше силы Архимеда, $G > P_a$ и их равнодействующая направлена вниз. Тело будет тонуть.

3. Плотность тела меньше плотности жидкости ($\rho_1 < \rho$)

Вес тела меньше силы Архимеда,$G<P_a$ и их равнодействующая направлена вверх. Погруженное в жидкость тело будет всплывать до тех пор, пока вследствие выхода части его над поверхностью подъемная сила не уменьшиться настолько, что станет равной весу тела. После этого тело будет плавать по поверхности жидкости. Подъемная сила в этом случае называется поддерживающей.

Наибольший практический интерес представляют условия равновесия при плавании тел (т.е. равновесия тел, погруженных в жидкость частично).

Плавучестью тела называется способность тела плавать в полупогруженном состоянии.

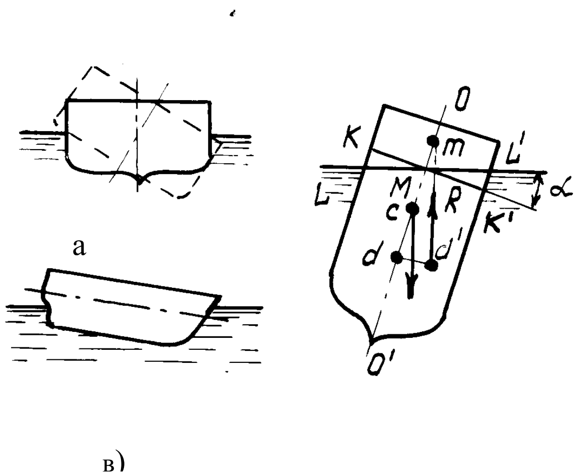


Рис.3.5. К теории плавания корабля.

Способность плавающего тела, выведенного из состояния равновесия, вновь возвращаться в это состояние, *называется остойчивостью.* В теории кораблей различают два вида остойчивости – поперечную (при крене судна), когда один борт превышает другой (рис.3.5а), и продольную, когда один конец судна (нос или корма) находится выше другого (рис.3.5б). Практически более важны исследования поперечной остойчивости, так как продольная остойчивость весьма значительна.

Силу тяжести (вес) жидкости, взятой в объеме погруженной части судна, называют *водоизмещением*, а точку приложения равнодействующей давления (т.е. центр давления) - *центром водоизмещения.* При нормальном положе6нии судна центр тяжести его (точка c) и центр водоизмещения (точка d) лежат на одной вертикальной прямой oo', представляющей собой ось симметрии и называемой *осью плавания* (рис.3.5.в).

Пусть под влиянием внешних сил судно наклонилось на некоторый угол α, часть судна KLM вышла из жидкости, а часть K'L'M' погрузилась в нее. При таком повороте положение центра тяжести c в теле судна останется неизменным. Не изменится и водоизмещение, но положение центра водоизмещения d станет иным. Пусть оно теперь будет d'. Приложим в точке d' подъемную силу R и линию ее действия продолжим до пересечения с осью симметрии судна OO'. Полученная точка m называется метацентром, а расстояние между метацентром и центром тяжести по оси плавания – *метацентрической высотой.* Обозначим это расстояние h и будем считать его положительным, если точка m лежит выше точке c, и отрицательным – в противном случае.

Таким образом, плавающее судно имеет три характерные точки:

- центр тяжести, не меняющий своего положения по отношению к судну при любом его положении;
- центр водоизмещения, перемещающийся при крене судна;
- метацентр, также изменяющий свое положение (при крене <15^0 положение метацентра можно считать постоянным).

Метацентрическим радиусом $\rho_м$ называется радиус, описываемой из метацентра дуги круга, по которой происходит перемещение центра водоизмещения при крене судна (линия $d-d'$). Остойчивость судна может также характеризоваться и величиной этого радиуса, тогда для обеспечения остойчивости не обходимо соблюдение следующего условия:

$$\rho\text{-}e>0$$

Величину метацентрического радиуса можно найти (для крена <15^0) по формуле:

$$\rho = \frac{I}{W} \qquad (3.14)$$

Тогда метацентрическая высота:

$$h = \rho \pm e = \frac{I}{W} \pm e \qquad (3.15)$$

Рассмотрим условия равновесия судна в зависимости от относительного расположения метацентра и центра тяжести.

1. Остойчивое равновесие – метацентр лежит выше центр тяжести ($h>0$); пара сил поворачивая судно, возвращает его в первоначальное положение;
2. Безразличное равновесие – метацентр и центр тяжести совпадают между собой ($h=0$);
3. Неостойчивое равновесие – метацентр лежит ниже центра тяжести ($h<0$); пара сил вызывает дальнейшее опрокидывание судна.

Значит, чем ниже центр тяжести и чем больше метацентрическая высота, тем больше остойчивость судна. Поэтому метацентрическая высота может быть принята за меру остойчивости. Практически ее нормальное значение для большинства торговых судов находится в пределах 0,3…..0,8 м.