ЛЕКЦИЯ 3

Дифференциальные уравнения равновесия жидкости (уравнения Эйлера).

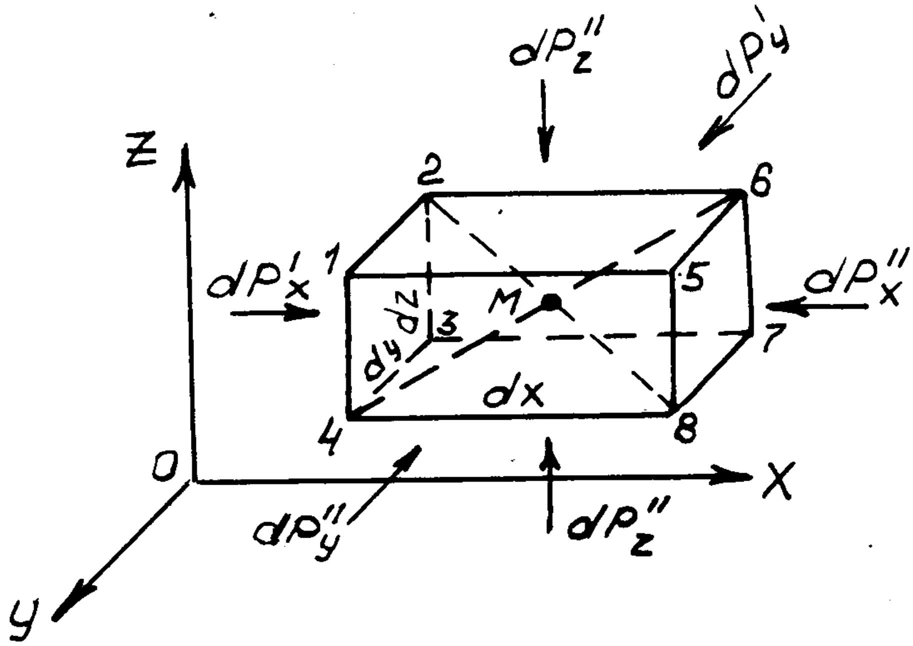

Рис. 2.3. К выводу уравнений
равновесия жидкости.

Выделим в жидкости, находящейся в состоянии покоя, бесконечно малый объем в форме параллелепипеда со сторонами, параллельными осям координат и равными соответственно *dx*, *dy*, *dz* (рис.2.3.) и рассмотрим равновесие сил, действующих на этот параллелепипед.

Такими силами являются: поверхностные силы гидростатического давления на грани параллелепипеда со стороны окружающей жидкости и массовые (объемные) силы, пропорциональные его массе.

Составим уравнения проекций этих сил на координатные оси. При этом ограничимся подробным рассмотрением лишь одного из них, например уравнения проекций на ось *x*. Будем предполагать, что гидростатическое давление есть непрерывная функция координат пространства и что его значение в центре тяжести параллелепипеда (т. *M*) равно *p*.

Тогда сила гидростатического давления на грань1-2-3-4 равна:

$$dP'_x = p'_x \cdot dx \cdot dy$$

Сила гидростатического давления на грань 5-6-7-8 аналогично:

$$dP''_x = p''_x \cdot dx \cdot dy$$

Так как гидростатическое давление является функцией координат, то значения p'_x и p''_x можно определить:

$$p'_x = p - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx$$

$$p''_x = p + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx$$

Проекция массовой силы $dG \cdot cos(d\vec{G}\wedge Ox)$ равна произведению элементарной массы dm на проекцию ускорения X:

$$dG \cdot \cos(d\vec{G}\wedge Ox) = dm \cdot g_x = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot X$$

Уравнение равновесия в проекции на ось Ox имеет вид:

$$dP'_x - dP''_x + dG \cdot \cos(d\vec{G}\wedge Ox) = 0 \qquad (2.11)$$

Подставив в (2.11) полученные ранее величины, получим:

$$\left[\left(p - \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx\right) - \left(p + \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)\right]dy \cdot dz + \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot X = 0,$$

или:

$$-\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz + \rho \cdot dxdydz \cdot X = 0 \qquad (2.12)$$

Разделив уравнение (2.12) на массу параллелепипеда dm, получим:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + X = 0$$

Проделав аналогичные операции с проекциями внешних сил на оси y и z, получим систему дифференциальных уравнений равновесия жидкости, впервые полученную в 1755 г. Эйлером:

$$\begin{cases} X - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ Y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ Z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \qquad (2.13)$$

Умножим каждое уравнение (2.13) соответственно на *dx ,dy, dz* и сложим их:

$$Xdx + Y\,dy + Zdz - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) = 0$$

или

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = \rho\left(Xdx + Ydy + Zdz\right) \qquad (2.14)$$

Так как левая часть уравнения (2.14) представляет собой полный дифференциал функции *dp*, т.е.:

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = dp,$$

следовательно:

$$dp = \rho\left(Xdx + Ydy + Zdz\right). \qquad (2.15)$$

Соблюдение условий равновесия требует при этом, чтобы и правая часть уравнения (2.15) была полным дифференциалом другой функции координат $U = f(x,y,z)$, частные производные которой по координатам равны проекциям ускорений объемных сил:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Y; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = Z; \qquad (2.16)$$

Такая функция называется силовой, или *потенциальной*, а силы, удовлетворяющие условиям (2.16), силами, имеющими *потенциал*.

Таким образом, уравнение (2.14) принимает вид:

$$dp = \rho \cdot dU \qquad (2.17)$$

Уравнение $dp = \rho\left(Xdx + Ydy + Zdz\right)$ называют основным дифференциальным уравнением равновесия жидкости, оно имеет общий характер и может быть использовано и для сжимаемой жидкости. В этом уравнении неизвестны только две величины ρ и p (значения проекций одиночных массовых сил и координаты точки предполагаются заданными). Следовательно, для получения однозначного решения уравнения (2.15) нужно воспользоваться так называемым характеристическим уравнением, которое определяло бы связь между физическими свойствами и состоянием рассматриваемой жидкости, например связь между плотностью жидкости, ее температурой и давлением.

Поверхность, в каждой точке которой значение данной функции постоянно, называется поверхностью уровня. Уравнение поверхности равного давления просто получается из уравнения (2.15). Так для поверхности уровня $p = const$ в любой точке, $dp = 0$ и, следовательно, правая часть уравнения также равна нулю. Плотность жидкости ρ отлична от нуля, поэтому:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \qquad (2.24)$$

или:

$$dU = 0$$

Из последнего уравнения следует, что поверхность уровня одновременно является и поверхностью равного потенциала или так называемой *эквипотенциальной* поверхностью.

3.4. Интегрирование уравнений равновесия жидкости. Равновесие жидкости в поле силы тяжести. Основное уравнение гидростатики

Рассмотрим важный частный случай, когда на покоящуюся однородную ($\rho = const$) жидкость действует лишь одна массовая сила - сила тяжести, а ускорение – ускорение свободного падения $-g$. При этом проекции ускорений объемных сил будут равны:

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = -g$$

Подставим эти величины в (2.15), получим:

$$dp = -\rho\, g\, dz \qquad (2.28)$$

или, что то же самое

$$dp + \rho\, g\, dz = 0 \qquad (2.29)$$

Проинтегрировав последнее уравнение, найдем:

$$p + \rho\, g\, z = C \qquad (2.30)$$

или

$$z + \frac{p}{\rho\, g} = C \qquad (2.31)$$

Уравнение (2.31) называется *основным уравнением гидростатики*, оно выражает закон распределения гидростатического давления в покоящейся жидкости.

Для определения постоянной интегрирования рассмотрим равновесие жидкости в сосуде произвольной формы со свободной поверхностью (рис. 2.4).

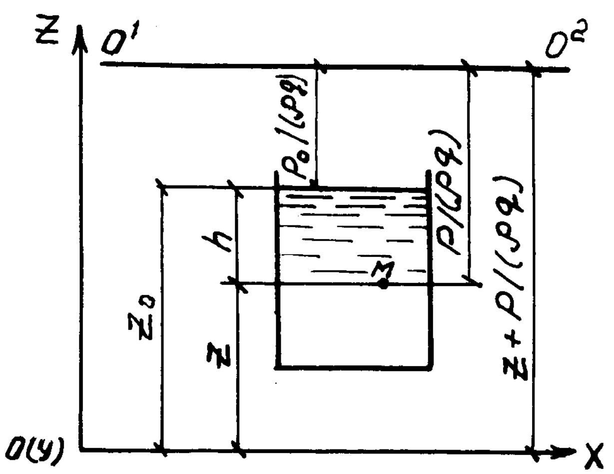

Рис. 2.4. Равновесие жидкости в поле силы тяжести.

Давление в каждой точке на свободной поверхности $p = p_0$, расстояние от произвольной плоскости сравнения (плоскость xOy) до свободной поверхности равно z_0. Тогда

$$z_0 + \frac{p_0}{\rho\, g} = C$$

и основное уравнение гидростатики примет следующий вид:

$$z + \frac{p}{\rho\, g} = z_0 + \frac{p_0}{\rho\, g} \qquad (2.32)$$

или

$$p = p_0 + \rho g (z_0 - z) \qquad 2.33)$$

Так как $z_0 - z = h$ - глубина погружения точки *М,* поэтому

$$p = p_0 + \rho g h \qquad (2.34)$$

Это уравнение представляет собой другую форму записи *основного уравнения гидростатики*, позволяющую определить давление в любой точке жидкости, зная давление на свободной поверхности и глубину погружения этой точки относительно свободной поверхности.

3.5. Единицы измерения давления. Приборы для измерения давления.

Как следует из определения гидростатического давления (2.10), его размерность в системе СИ – Н/м^2, и эта единица получила название *паскаль* - (Па), также используются производные единицы – кПа (килопаскаль) и МПа (мегапаскаль).

1 Па=1 Н/м^2= 10^{-3} кПа= 10^{-6} МПа

В технике в настоящее время продолжают применять также систему единиц МКГСС, в которой за единицу давления принимают кгс/м^2. Используют также и внесистемные единицы – *техническую атмосферу*(ат), физическую атмосферу (атм) и *бар.*

1 ат=1кгс/см^2=10 000кгс/м^2;   1бар= 10^{5}Па=1,02 ат

Часто давление в жидкостях или газах численно выражают в виде соответствующей этому давлению пьезометрической высоты $\frac{p}{\rho g}$, тогда используют следующие единицы измерения давления – *метры водяного столба* (м.вод.ст) и *миллиметры ртутного столба* (мм.рт.ст.).

1 ат= 10 м вод.ст.= 735 мм рт.ст, 1атм = 760 мм рт. ст.

В англоязычных странах используется единица измерения давления –

psi - $\frac{pound}{square\ inch}$ (фунт/дм^2)

(1 фунт = 454 г, 1 дюйм = 25,4 мм)

Соотношения между некоторыми единицами, не входящими в систему СИ и Паскалями приведены в таблице 2.1

Таблица 2.1.

Соотношения между единицами давления

Единицы, не входящие в СИ	Бары	Система Си
1 ат	0,981 бар	98,1 кПа
1 м вод.ст =0,1 ат	98,1 мбар	9,81 кПа
1 мм вод.ст. = 10^{-4} ат	98,1 мкбар	9,81 Па
1 бар		100 кПа
1 мм рт.ст.	1,333 мбар	133,3 Па
1 атм	1,013 бар	101,3 кПа
1 фунт-сила/кв. ярд	53,2 мкбар	5,32 Па
1 фунт-сила/ кв.фут	478,8 мкбар	47,88 Па
1 фунт-сила/кв.дюйм	68,95 мбар	6,895 кПа
1 дюйм вод. ст.	2,49 мбар	249,1 Па
1 дюйм рт. ст.	33,86 мбар	3,386 кПа

В технической механике жидкости давление, как и многие другие физические единицы (например, температура) может измеряться в абсолютных или относительных величинах, т.е. отсчитываться от абсолютного или относительного нуля. За относительный ноль в гидромеханике принимают атмосферное давление (рис.2.8).

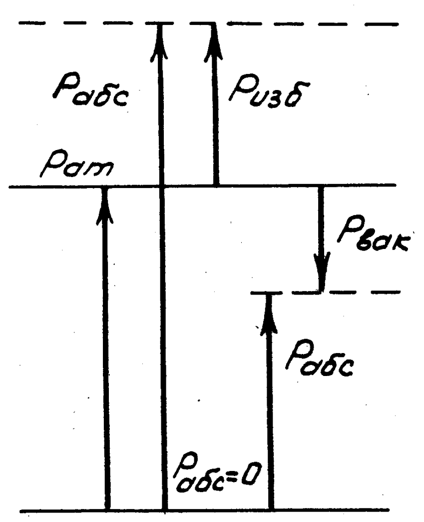

Рис. 2.8. Измерение давления

Тогда давление в т. А относительно абсолютного ноля – $p_{абс\ A}$, а в относительных единицах давление в т. А – $p_{изб\ A}$. Давление, отличное от атмосферного называется *избыточным (манометрическим)* давлением. Заметим, что абсолютное давление всегда положительное, а избыточное может быть и положительным и отрицательным. Так, избыточное давление в т. В – отрицательное. Отрицательное избыточное давление называется *вакуумом*. Тогда:

$$p_{абс} = p_{ат} + p_{изб} \qquad (2.43)$$

$$p_{вак} = p_{ат} - p_{абс} \qquad (2.44)$$

или $$p_{вак} = -p_{изб} \qquad (2.45)$$

Для измерения давления существуют различные приборы, которые можно разделить на два класса – жидкостные и механические, принцип действия и конструкции которых приведены в лабораторной работе «Приборы для измерения давления».

2.8. Относительное равновесие жидкости

Относительным равновесием жидкости называется такое состояние, при котором каждая ее частица сохраняет свое положение относительно твердой стенки движущегося сосуда. При этом можно рассматривать две задачи – определение формы поверхности уровня и распределение давления, которые решаются с помощью ранее выведенных уравнений (2.15) и (2.24). Разумеется, что кроме массовых сил следует учитывать и силы инерции.

Вертикальное движение сосуда с жидкостью с постоянным ускорением

Пусть сосуд, заполненный жидкостью, движется вертикально с постоянным ускорение a (рис. 2.9). Для определения формы поверхности равного давления воспользуемся уравнением (2.24).

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

Проекции единичных сил на координатные оси будут:

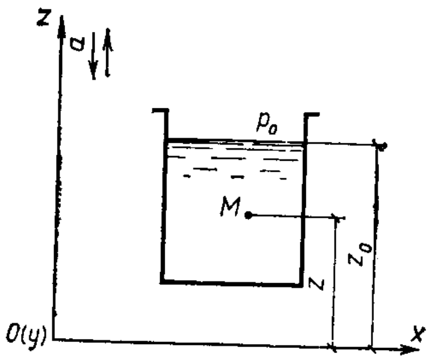

Рис.2.9. Вертикальное перемещение сосуда

$$X = 0 \quad Y = 0 \quad Z = -g \pm a$$

(знак – соответствует подъему, а знак + спуску резервуара с постоянным ускорением).

Составим уравнение поверхности уровня:

$$(-g \pm a)dz = 0 \qquad (2.46)$$

Если $a \neq g$, то $dz = 0$, и, следовательно, $z=const$, т.е. при ноускоренном движении сосуда с жидкостью по верали, поверхности равного давления представляют собой горизонтальные плоскости.

Характер распределения давления получим, используя уравнение (2.15).

$$dp = \rho\left(Xdx + Ydy + Zdz\right).$$

Подставив значения проекций единичных массовых сил, получим:

$$dp = \rho(-g \pm a)dz \qquad (2.47)$$

Проинтегрировав это уравнение при граничных условиях $z = z_0$ и $p = p_0$, получим закон распределения давления вдоль любой вертикали:

$$p = p_0 = \rho g\left(1 \pm \frac{a}{g}\right)(z_0 - z) \qquad (2.48)$$

Это уравнение показывает, что при движении сосуда с жидкостью по вертикали с постоянным ускорением a распределение давления подчиняется линейному закону.

Горизонтальное движение сосуда с постоянным ускорением

Рассмотрим горизонтальное перемещение сосуда с жидкостью с постоянным ускорением a (рис. 2.10). В этом случае проекции массовых сил равны:

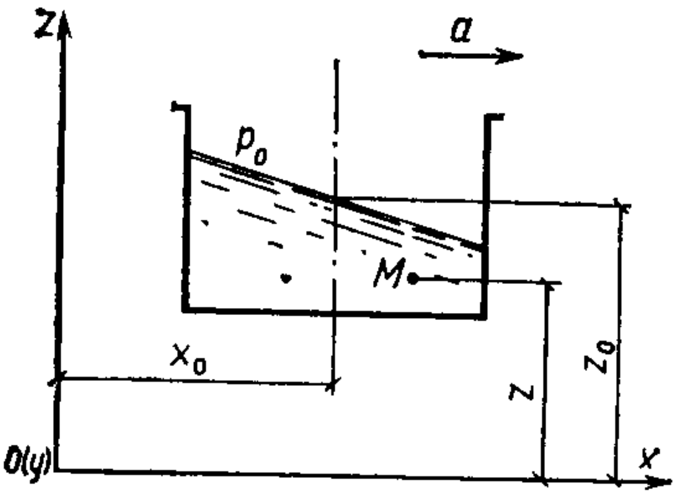

Рис. 2.10. Горизонтальное перемещение сосуда

$$X = -a \quad Y = 0 \quad Z = -g.$$

Поверхность равного давления при этом определяется уравнением:

$$-\left(adx + gdz\right) = 0 \qquad (2.49).$$

После интегрирования получим:

$$z = \frac{const - ax}{g} = const - \frac{ax}{g} \qquad (2.50)$$

Из уравнения (2.50) следует, что поверхностями равного давления будут наклонные плоскости. Угол их наклона к горизонту равен:

$$tg\alpha = -\frac{a}{g}$$

Закон распределения давления получим, проинтегрировав уравнение (2.15) с учетом того, что $X = -a \quad Y = 0 \quad Z = -g$, а граничные условия имеют вид: $x = x_0, z = z_0, p = p_0$.

$$p = p_0 + \rho a\left(x_0 - x\right) + \rho g\left(z_0 - z\right) \qquad (2.51)$$

Уравнение (2.51)показывает, что при горизонтальном движении сосуда с жидкостью с постоянным ускорением a распределение давления также подчиняется линейному закону для любой вертикали.

Вращение цилиндрического сосуда с жидкостью с постоянной угловой скоростью ω

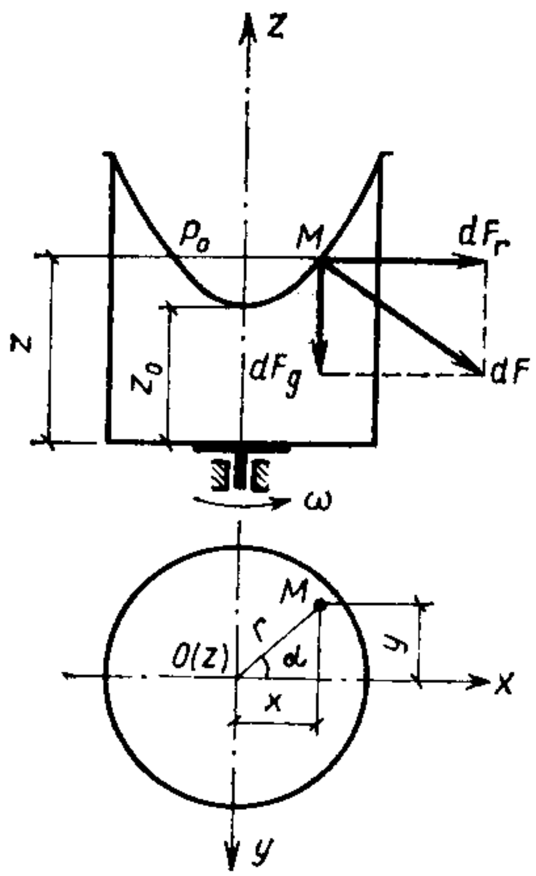

Рис.2.11. Вращение сосуда с жидкостью

Пусть цилиндрический сосуд, заполненный жидкостью, вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси z (рис.2.11.). Определим форму свободной поверхности и найдем распределение давления. Выберем вблизи свободной поверхности частицу жидкости массой *dm;* на эту частицу действует массовая сила *dF,* направленная по нормали к свободной поверхности. Разложим эту силу на две составляющие: горизонтальную (центробежную) силу

$dF_r = dm\omega^2 r$ и вертикальную, определяемую полем силы тяжести,

$dF_g = -dmg$. Проекции единичных массовых сил получим, разделив действующие силы на *dm:*

$$X = \omega^2 r\cos\alpha = \omega^2 x; \;\; Y = \omega^2 r\sin\alpha = \omega^2 y; \;\; Z = -g$$

Дифференциальное уравнение поверхности уровня в нашем случае примет следующий вид:

$$\omega^2 xdx + \omega^2 ydy - gdz = 0, \text{ или } \omega^2 rdr - gdz = 0$$

Интегрируя это уравнение, получим для поверхности равного давления:

$$\omega^2 \frac{r^2}{2} - gdz = const \qquad (2.52)$$

Таким образом, при вращении сосуда с жидкостью с постоянной скоростью вокруг вертикальной оси поверхностями равного давления будет семейство параболоидов вращения, осью симметрии которых является ось z..

Закон распределения давления по вертикальной координате и радиусу найдем из дифференциального уравнения (2.15), которое в рассматриваемом случае примет следующий вид:

$$dp = \rho\left(\omega^2 xdx + \omega^2 ydy - gdz\right)$$

или

$$dp = \rho\left(\omega^2 rdr - gdz\right) \qquad (2.53)$$

После интегрирования с учетом граничных условий ($r=0,\ z=z_0,\ p=p_0$) получим закон распределения давления:

$$p = p_0 + \rho\omega^2 \frac{r^2}{2} + \rho g\left(z_0 - z\right) \qquad (2.54)$$

Уравнение (2.54) показывает, что в рассматриваемом случае распределение давления по вертикальной координате подчиняется линейному закону для любой фиксированной круглоцилиндрической поверхности.