Лекция 2
РАВНОВЕСИЕ ЖИДКОСТИ И ГАЗА.

Одной из важнейших задач в статике текучей среды (гидростатике) является определение законов равновесия жидкости, определение давлений, их свойств.

2.1. Распределение сил в сплошной среде.

Жидкости и газы всегда подвержены действию некоторых сил, которые являются в основном распределенными, т.е. приложенными во всех точках поверхности или объема. Однако в исключительных случаях в жидкостях могут действовать и сосредоточенные силы.

По характеру действия распределенные силы можно разделить на *поверхностные и массовые (объемные).* К первым относятся силы вязкости и давления, а ко вторым – силы тяжести, инерции, электромагнитные и др.

Поверхностные силы являются результатом непосредственного воздействия на частицы среды соседних с ними частиц или других тел. Для качественного и количественного описания поверхностных сил служит понятие о напряжениях. В покоящемся или движущемся объеме сплошной среды W проведем произвольную поверхность S (рис. 2.1, *а*) и мысленно отбросим часть жидкости, расположенную справа от поверхности. Чтобы оставшаяся жидкость при этом сохраняла состояние покоя или движения, приложим к ней по поверхности S распределенную систему сил, эквивалентную тому воздействию, которое оказывала отброшенная часть жидкости объемом W_1 на оставшуюся часть объемом W_2. Пусть на элементарную площадку ΔS, характеризуемую направлением (единичным вектором нормали) $\vec{n}$, действует сила $\Delta\vec{P}$.

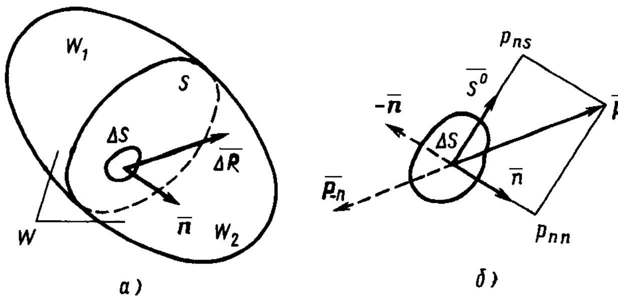


Рис. 2.1. Поверхностные силы и их напряжения

Тогда

$$\lim_{\Delta S \to 0}\left(\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta S}\right) = \vec{p}_n \qquad (2.1)$$

назовем *напряжением поверхностных сил* в той точке, к которой стягивается площадка ΔS. Заметим, что индекс n здесь обозначает не проекцию (ибо $\vec{p}_n$ – вектор), а ориентацию площадки ΔS в пространстве, т.е. указывает, что $\vec{p}_n$ - напряжение на площадке с нормалью $\vec{n}$.

По отношению к площадке вектор $\vec{p}_n$ в общем случае может быть направлен как угодно и потому он имеет *нормальную и касательную составляющие.* Из рис. 2.1, *б* видно, что

$$\vec{p}_n = p_{ns}\vec{s}^{\,0} + p_{nn}\vec{n}\,, \qquad (2.2)$$

где p_{nn} - проекция вектора $\vec{p}_n$ на направление нормали; p_{ns} - проекция вектора $\vec{p}_n$ на направление $\vec{s}^{\,0}$, т.е. касательной к площадке ΔS.

В частном случае может быть p_{ns}=0 и $\vec{p}_n = p_{nn}\vec{n}$.

Поскольку в каждой точке поверхности S, проведенной внутри среды, можно указать две нормали: $\vec{n}$ и $-\vec{n}$ (рис. 2.1, *б*), то им будут соответствовать два напряжения: $\vec{p}_n$ и $\vec{p}_{-n}$. Тогда силы $\vec{p}_n\Delta S$ и $\vec{p}_{-n}\Delta S$ будут выражать взаимное действие через площадку ΔS объемов жидкости, расположенных по обе стороны от нее. Согласно третьему закону Ньютона $\vec{p}_n \Delta S = -\vec{p}_{-n} \Delta S$ или $\vec{p}_n = -\vec{p}_{-n}$. Соответственно векторам $\vec{p}_n$ и $\vec{p}_{-n}$ будем различать две стороны площадки ΔS, к которым эти векторы приложены, приписывая этим сторонам разные знаки.

Для характеристики массовых сил введем понятие о плотности их распределения. Если на элементарный объем ΔW среды действует сила $\Delta\vec{G}$, вектор $\vec{g}$, определяемый условием

$$\vec{g} = \lim_{\Delta W \to 0}\left[\frac{\Delta \vec{G}}{\Delta W \rho}\right]. \qquad (2.3.)$$

называется *плотность распределения массовых сил* в той точке, к которой стягивается объем ΔW. Очевидно, $\vec{g}$ является массовой силой, приходящейся на единицу массы среды, и имеет размерность ускорения. В дальнейшем ее проекции на оси декартовых прямоугольных координат обозначаются через X, Y, Z.

Величины $\vec{p}_n$ и $\vec{g}$ являются основными характеристиками сил, действующих в жидкости.

2.2. Свойства напряжений поверхностных сил

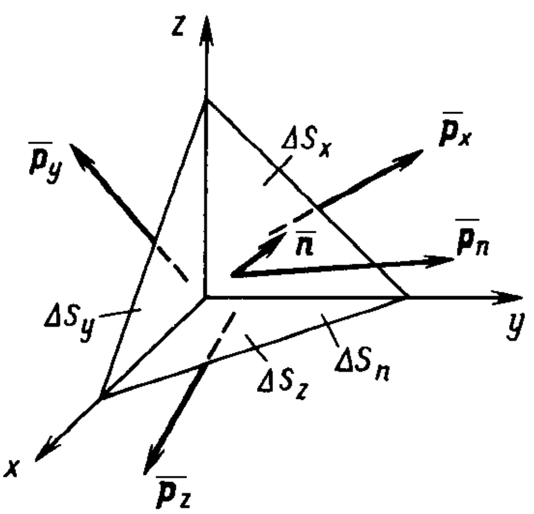


Рис.2.2. Напряжения, действующие в тетраэдре

Выделим в покоящейся жидкости элементарный объем ΔW в виде тетраэдра, грани которого $\Delta S_x, \Delta S_y, \Delta S_z$ лежат в координатных плоскостях, а четвертая ΔS_n нормальна направлению $\vec{n}$ (рис. 2.2). Обратим внимание на то, что грани $\Delta S_x, \Delta S_y, \Delta S_z$ являются отрицательными площадками, поскольку нормалями к ним служат векторы $-\vec{i}, -\vec{j}, -\vec{k}$.

Пусть $\vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z$ - напряжения, действующие на соответствующих гранях тетраэдра; $\vec{a}$ - вектор ускорения его центра масс. Тогда векторное уравнение движения жидкого тетраэдра, выражающего второй закон Ньютона, будет иметь вид

$$\vec{g}\rho\Delta W + \vec{p}_n \Delta\vec{S}_n - \vec{p}_x \Delta S_x - \vec{p}_y \Delta S_y - \vec{p}_z \Delta S_z = \vec{a}\rho\Delta W .$$

Учтем, что

$$\lim_{\Delta S_n \to 0}\left[\frac{\Delta W}{\Delta S_n}\right] = 0 ,$$

а

$$\frac{\Delta S_x}{\Delta S_n} = \cos(n,x) = \alpha_{nx}, \frac{\Delta S_y}{\Delta S_n} = \cos(n,y) = \alpha_{ny}, \frac{\Delta S_z}{\Delta S_n} = \cos(n,z) = \alpha_{nz}$$

Тогда, разделив все члены последнего уравнения на ΔS_n, в пределе получим

$$\vec{p}_n = \vec{p}_x \alpha_{nx} + \vec{p}_y \alpha_{ny} + \vec{p}_z \alpha_{nz} . \qquad (2.4)$$

Следовательно, напряжение на любой площадке ΔS_n можно выразить через напряжения на трех взаимно ортогональных площадках, которыми могут быть и координатные площадки. Соотношение (2.4) в проекциях на оси координат имеет вид

$$\begin{aligned} p_{nx} &= p_{xx}\alpha_{nx} + p_{yx}\alpha_{ny} + p_{zx}\alpha_{nz}; \\ p_{ny} &= p_{xy}\alpha_{nx} + p_{yy}\alpha_{ny} + p_{zy}\alpha_{nz}; \\ p_{nz} &= p_{xz}\alpha_{nx} + p_{yz}\alpha_{ny} + p_{zz}\alpha_{nz}. \end{aligned} \qquad (2.5)$$

Здесь, как можно видеть, для каждой из проекций p_{ij} употребляется два индекса, первый из которых указывает ориентацию площадки (ее нормаль), а второй ось, на которую проектируется вектор. Так, например, величина p_{xx} есть проекция на ось x (второй индекс) напряжения $\vec{p}_x$, действующего на площадке, нормальной к оси x (первый индекс). Поэтому p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} представляют собой *нормальные* к соответствующим площадкам *напряжения*. Разноименные индексы определяют *касательные напряжения*. Например, p_{yz} есть проекция на ось z напряжения $\vec{p}_y$, приложенного к площадке, нормальной к оси y.

В дальнейшем для краткости проекции p_{ij} напряжений будем называть просто напряжениями.

Между касательными напряжениями существует связь вида

$$p_{xy} = p_{yx}; p_{yz} = p_{zy}; p_{zx} = p_{xz},$$

которая называется *законом парности касательных напряжений*.

Следовательно, напряженное состояние жидкости в точке определяется шестью независимыми скалярными величинами, три из которых являются нормальными напряжениями, а три – касательными (знаки и численные значения проекций векторов зависят от выбора осей координат, тогда как скалярные величины не зависят от него; поэтому проекции векторов, а также другие аналогичные по свойствам величины, иногда называют псевдоскалярами). Совокупность девяти величин типа p_{ij}, связанных соотношениями (2.5), образуют *тензор напряжений*.

Из вышеизложенного следует, что напряженное состояние в точке движущейся среды определяется тензорной величиной.

В реальных жидкостях и газах нормальные напряжения могут создаваться как давлением одних частиц на другие, так и действием сил вязкости. Касательные напряжения являются результатом действия сил вязкости и зависят от давления лишь постольку, поскольку от него зависит коэффициент вязкости. Для модели идеальной жидкости, которая лишена вязкости и в которой все касательные напряжения равны нулю, полные напряжения направлены по нормали к соответствующим площадкам и согласно равенствам (3.16) выражаются формулами

$$p_{nx} = p_{xx}\alpha_{nx};\, p_{ny} = p_{yy}\alpha_{ny};\, p_{nz} = p_{zz}\alpha_{nz}. \qquad (2.6)$$

При этом напряжения должны быть сжимающими, т.е. направленными по внутренним нормалям, так как по упомянутой выше гипотезу механики сплошных сред технические жидкости не выдерживают растягивающих усилий (из-за наличия растворенного воздуха). Поэтому величины p_{nx}, p_{ny}, p_{nz} можно вычислить из соотношения

$$\begin{gathered} p_{nx} = \vec{p}_n\vec{i} = p_n \cos(n, x) = p_n\alpha_{nx}; \\ p_{ny} = p_n\alpha_{nx};\, p_{ny} = p_n\alpha_{nx}. \end{gathered} \qquad (2.7)$$

Сопоставляя равенства (2.6) и (2.7), получаем

$$p_n = p_{xx} = p_{yy} = p_{zz}.$$

Эти равенства показывают, что при отсутствии касательных напряжений нормальные напряжения не зависят от ориентации площадок и представляют собой *давление* p *в точке сплошной среды*, т.е.

$$p = -p_n = -p_{xx} = -p_{yy} = -p_{zz}. \qquad (2.8)$$

Очевидно, в силу выражения (2.8) вектор напряжения в данном случае можно представить в виде

$$\vec{p}_n = -p\vec{n}.$$

Знак минус показывает, что напряжение направлено по внутренней нормали, т.е. является сжимающим.

Заметим, что касательные напряжения равны нулю также в любой вязкой жидкости, находящейся в покое, так как при существовании любых сколь угодно малых сдвиговых усилий из-за легкоподвижности среды произошло бы относительное перемещение слоев, т.е. жидкость была бы выведена из состояния покоя. Следовательно, полученный вывод о независимости нормальных напряжений от ориентаций площадок справедлив для любой покоящейся жидкости. Давление p в этом случае называется *гидростатическим*.

2.3. Гидростатическое давление и его свойства

Как было указано выше, в покоящихся жидкости и газе касательные напряжения в любой точке равны нулю, присутствуют только нормальные напряжения сжатия (т.к. жидкости и газы не выдерживают растягивающих усилий), которые равны между собой. Величина, равная модулю нормального напряжения сжатия, называется *гидростатическим давлением* в точке или просто давлением *p.*

Гидростатическое давление в точке может быть также представлено следующим образом (рис. 2.1.). На элементарную площадку ΔS, характеризуемую единичным вектором нормали $\vec{n}$, действует нормальная составляющая поверхностной силы ΔP. Напряжение сжатия, возникающее от действия этой силы, определится как частное от деления силы ΔP на площадь ΔS:

$$p_n = p_{ср} = \frac{\Delta P}{\Delta S} \qquad (2.9)$$

Значение этого напряжения принято называть средним гидростатическим давлением. Предел отношения (2.9) при $\Delta S \to 0$ называется гидростатическим давлением в точке – p [Н/м^2].

$$p = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta S} \qquad (2.10)$$

Хотя свойства гидростатического давления были указаны в п. 2.2, подчеркнем их еще раз:

1. Гидростатическое давление направлено по внутренней нормали к площадке, на которое оно действует.
2. Величина гидростатического давления не зависит от ориентации (от угла наклона) площадки.
3. Давление на свободной поверхности жидкости передаются всем точкам жидкости одновременно и без искажений (закон Паскаля).

2.4 Равновесие несжимаемой жидкости в поле силы тяжести.

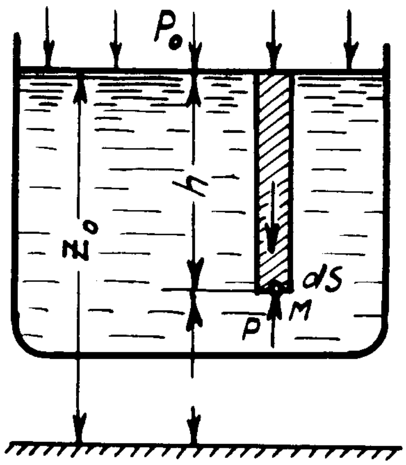


Рис.2.5. Схема для вывода основного уравнения гидростати-

Это уравнение можно получить и более простым путем, рассмотрев равновесие жидкости в сосуде (рис.2.5), на свободную поверхность которой действует давление p_0. Найдем гидростатическое давление p в произвольно взятой точке M, расположенной на глубине h.

Выделим около точки M элементарную троим на ней вертикальный цилиндрический объем высотой h. Рассмотрим условие равновесия указанного объема жидкости, выделенного из общей массы жидкости. Давление жидкости на нижнее основание цилиндра теперь будет внешним и направлено по нормали внутрь объема, т.е. вверх.

Запишем сумму сил, действующих на рассматриваемый объем в проекции на вертикаль:

$$p\,dS - p_0\,dS - \rho\,g\,h\,dS = 0$$

Последний член уравнения представляет собой вес жидкости в выделенном объеме. Сократив выражение на dS и сгруппировав члены, найдем:

$$p = p_0 + \rho\,g\,h$$

Обозначив координату точки M через z, а координату свободной поверхности – через z_0 и заменив h на $z_0 - z$, получим:

$$z + \frac{p}{\rho\,g} = z_0 + \frac{p_0}{\rho\,g}.$$

Так как точка *M* была взята произвольно, можно утверждать, что для всего рассматриваемого неподвижного объема

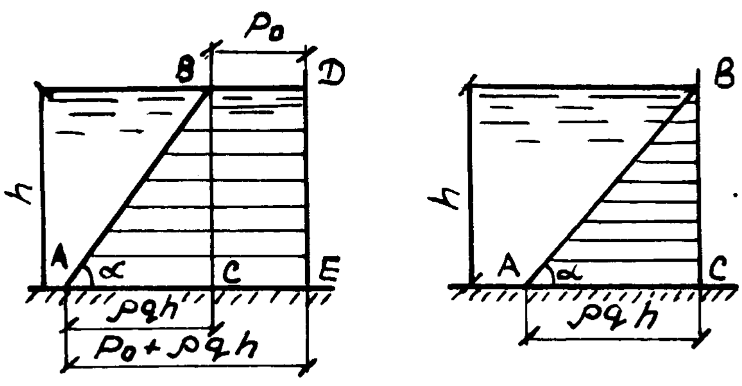
$$z + \frac{p}{\rho g} = Const, \text{ или}$$

$$p + \rho g z = Const$$

Координата z называется геометрической высотой. Величина $\frac{p}{\rho g}$ имеет линейную размерность и называется пьезометрической высотой. Сумма $z + \frac{p}{\rho g}$ называется гидростатическим напором.

Таким образом, гидростатический напор есть величина постоянная для всего объема неподвижной жидкости.

В гидравлике величина p называется *полным* или *абсолютным* гидростатическим давлением, p_0 - внешним давленим или давленим на поверхности, а величина $\rho g h$ при постоянной плотности зависит только от глубины погружения точки и называется *избыточным* давлением (в аэродинамике избыточным давлением принято называть разность между абсолютным и атмосферным давлением



а) б)

Рис. 2.6. Эпюры распределения гидростатического давления (а – абсолютного, б – избыточного)

Из уравнения (2.34) следует, что распределение гидростатического давления по вертикали линейно зависит от глубины погружения рассматриваемой точки и может быть графически представлено в виде трапеции для абсолютного давления (рис.2.6,а) или прямоугольника треугольника для избыточного давления (рис.2.6,б).

Угол наклона линии давления зависит от плотности жидкости.