СХІДНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВОЛОДИМИРА ДАЛЯ

Факультет ___інформаційних технологій та електроніки__________

Кафедра _____інформаційних технологій та програмування________

Пояснювальна записка

до магістерської дипломної роботи

________________________магістр________________________
(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему: ___ Дослідження пріоритетних та циклічних систем з повторними викликами________________________________

Виконав: студент 2 курсу, групи_ІСТ-22дм_
126 «Інформаційні системи та технології___
(шифр і назва спеціальності)
________Ломако-Бодяков Д.С.____________
(прізвище та ініціали)
Керівник ___Лифар В.О._______________
(прізвище та ініціали)
Рецензент_____________________________
(прізвище та ініціали)

Київ – 2023 року

СХІДНОУКРАЇНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ВОЛОДИМИРА ДАЛЯ

Факультет ___інформаційних технологій та електроніки_____________
Кафедра _____інформаційних технологій та програмування__________
Освітньо-кваліфікаційний рівень __магістр_______________________________
Спеціальність 126 «Інформаційні системи та технології»__________________
(шифр і назва спеціальності)

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри ІТП
___________ д.т.н., доц. Захожай О.І.
(підпис)
« ___ » ________2023 р.

ЗАВДАННЯ

на магістерську дипломну роботу студенту
___________Ломако-Бодяков Дмитро Сергійович__________
(прізвище, ім'я, по батькові)

1.Тема роботи: Дослідження пріоритетних та циклічних систем з повторними викликами ___________________________________
керівник роботи доцент, д.т.н. Лифар Володимир Олексійович ,
(вчене звання, науковий ступінь, прізвище, ім'я, по батькові)
затверджені наказом університету від «_21_»_11__ 2023року № 614/15.15-С_
2. Строк подання студентом роботи: 06 грудня 2023 р.____________________
3. Вихідні дані до роботи: Матеріали науково-дослідної практики, науково-методична література; дані інтернет-мережі . ____________________________
4. Зміст розрахунково-пояснювальної записки (перелік питань, які потрібно розробити)

4.1 Вступ

4.2 Аналітичний огляд питання (огляд публічних джерел інформації)

4.3 Основна частина, в якої висвітлити методи, які будуть використовуватися для реалізації проекту.

4.4 Практична частина – огляд технологій, які використовуються під час реалізації проекту.

4.4 Висновки

4.5 Перелік використаних джерел

6. Консультанти розділів проєкту (роботи)

Розділ	Прізвище, ініціали та посада консультанта	Підпис, дата	
		Завдання видав	Завдання прийняв

7. Дата видачі завдання __20 жовтня 2023р.___________________________

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№ з/п	Назва етапів дипломної роботи	Строк виконання етапів роботи	Примітка
1.	Одержання завдання на виконання роботи	20.10.2023	
2.	Укладання і погодження з керівником плану і етапів виконання роботи	24.10.2023	
3.	Узагальнення даних літературних джерел	28.10.2023	
4.	Аналіз шляхів виконання завдання. Вибір і погодження з керівником оптимального шляху виконання завдання	01.11.2023	
5.	Аналіз технічних засобів та існуючих систем	07.11.2023	
6.	Реалізація практичної частини завдання	24.11.2023	
7.	Укладання, оформлення та погодження пояснювальної записки з керівником	05.12.2023	
8.	Здача пояснювальної записки на кафедру	06.12.2023	
9.	Підготовка доповіді та презентації	09.12.2023	

Студент __________Ломако-Бодяков Д.С._
(підпис) (прізвище та ініціали)

Керівник роботи ________ _Лифар В.О.
(підпис) (прізвище та ініціали)

АННОТАЦІЯ

Тема випускної кваліфікаційної роботи:

"Дослідження пріоритетних і циклічних систем з повторними викликами".

Ключові слова: система масового обслуговування, система з повторними викликами, RQ-система, пріоритетні заявки, витіснення заявок, циклічні системи, система з прогулянками приладу, ітераційний (рекурентний) алгоритм, метод асимптотично-дифузійного аналізу, метод імітаційного моделювання.

Об'єкт дослідження - пріоритетні та циклічні системи з повторними викликами.

Мета роботи - побудова математичних моделей мережі зв'язку та знаходження розподілів імовірностей станів приладу та числа заявок на орбіті в запропонованих моделях.

Методи дослідження - методи теорії ймовірностей і випадкових процесів, метод асимптотично-дифузійного аналізу, метод ітераційної алгоритмізації, метод імітаційного моделювання.

Робота містить 7 розділів, 69 сторінок, 24 рисунки, 6 таблиць, 50джерел.
У першому розділі наведено приклади реальних систем, для яких було побудовано математичні моделі. У другому розділі досліджувалася RQ-система з повторними викликами, експоненціальним часом обслуговування
і пріоритетними заявками.
Отримано розподіли ймовірностей станів приладу і числа заявок на орбіті методом асимптотично дифузійного аналізу та методом ітераційної алгоритмізації.
 Також проведено аналіз області застосовності асимптотично дифузійної апроксимації числа заявок на орбіті шляхом порівняння з результатами приладу і числа заявок на орбіті методом асимптотично-дифузійного аналізу та методом ітераційної алгоритмізації.
 Також проведено аналіз області застосовності асимптотично дифузійної апроксимації числа заявок на орбіті шляхом порівняння з результатами, отриманими за допомогою ітераційного (рекурентного) алгоритму.

ВСТУП

Останнім часом значну кількість наукових досліджень було присвячено системам масового обслуговування з повторними викликами (Retrial Queueing System) [36–38, 40], оскільки за допомогою таких RQ-систем можна моделювати багато проблем, що виникають у комп'ютерних мережах, телекомунікаціях, телефонних системах та у повсякденному житті [39, 41, 55]. У RQ-системах, коли обслуговуючий прилад вже зайнятий, заявки, що прийшли, відправляються в зону очікування, звану орбітою, і після випадкового часу очікування знову намагаються зайняти прилад, поки вони успішно не завершать обслуговування. Така поведінка дозволяє не втрачати заявки, що є дуже важливим аспектом в даний час. У простих системах масового обслуговування заведено вважати, що всі запити, які надходять у систему, - однорідні [19, 22, 31], тобто їх обслуговують у системі відповідно до одного загального порядку вибору з черги. Проте численні системи реального світу містять різнорідні за своєю цінністю для системи запити і, отже, у момент звільнення приладу такі заявки мають різну черговість обслуговування. Описувані моделі досліджуються як системи масового обслуговування з пріоритетними заявками [3, 24, 45]. У таких системах існує кілька вхідних потоків, яким призначають певний пріоритет. Якщо в черзі перебувають заявки з різними пріоритетами, то першими на обслуговування надходять заявки з вищим пріоритетом.

Існує кілька типів пріоритетних заявок. У системах з відносним пріоритетом [12, 27, 32] заявка, що обслуговується, завжди закінчує обслуговування на приладі, навіть якщо в систему надійшла заявка з вищим пріоритетом. У системах з абсолютним пріоритетом [26, 33, 34, 50] обслуговування заявки переривається, якщо надходить заявка з вищим пріоритетом. Заявка, обслуговування якої було перервано, відправляється на орбіту і знову намагається обслужитися через випадковий час.

Заявки з високим пріоритетом можуть поводитися по-різному: йти на орбіту або губитися, обслуговуватися відповідно до дисципліни, що витісняє або не витісняє. У RQ-системах може використовуватися термін

"відмова", під цим розуміють вихід заявки із системи без отримання обслуговування, оскільки прилад не зміг обслужити нетерплячу заявку під час надходження [42, 54].

Також цікавими для дослідження є циклічні системи з повторними викликами [11, 49]. Для ефективного поділу спільного ресурсу зв'язку існують циклічні протоколи, коли кожен пристрій має однаковий пріоритет і йому виділяється один часовий інтервал часу, протягом якого він повністю передає дані центральному вузлу. У цьому разі тимчасові вікна йдуть одне за одним, кожне тимчасове вікно закріплено за одним пристроєм, який протягом цього часу передає зібрану інформацію у своєму сегменті циклу центру управління.

Існують різні методи дослідження таких систем із повторними викликами. Деякі системи вдається дослідити чисельним [25, 29] або матричним [23, 44] методами. Більш складні системи досліджуються аналітичними методами. Нині для вивчення RQ-систем найвідомішими є метод асимптотичного аналізу [14, 17, 20] і метод асимптотично-дифузійного аналізу [21, 46, 51, 52] у різних граничних умовах. Також для деяких систем із повторними викликами виникає необхідність написання імітаційних моделей для різних цілей [16, 28, 47].

У цій роботі було досліджено RQ-системи з абсолютним пріоритетом і нетерплячими пріоритетними заявками, а також циклічні системи з повторними викликами. Розглянуто такі системи з різними розподілами часу обслуговування заявок, що надходять. Було розроблено імітаційні моделі для пріоритетних систем і методи асимптотично-дифузійного аналізу для пріоритетних систем M2|M2|1, M2|M, GI|1, M2|GI2|1 та циклічних систем з повторними викликами в

асимптотичній умові великої затримки на орбіті, також були знайдені розподіли ймовірностей приладу і числа заявок на орбіті в перерахованих системах. У цьому полягає наукова новизна отриманих результатів цієї дисертації.

Метою даної роботи є побудова математичних моделей мережі зв'язку та знаходження розподілів імовірностей станів приладу і числа заявок на орбіті в запропонованих моделях.

Для досягнення цієї мети було поставлено такі завдання:

1. Побудувати математичні моделі у вигляді пріоритетних і циклічних систем з повторними викликами;
2. дослідити запропоновані математичні моделі методом асимптотично-дифузійного аналізу;
3. Побудувати ітераційний (рекурентний) алгоритм для пріоритетної системи з повторними викликами та експоненціальним часом обслуговування;
4. Побудувати імітаційну модель досліджуваних пріоритетних систем;
5. Оцінити область застосовності отриманих асимптотичних розв'язків на основі результатів чисельних експериментів, ітераційного (рекурентного) алгоритму та результатів імітаційного моделювання.

1 Дослідження системи M2|M2|1 з повторними викликами та пріоритетними заявками

1.1 Приклад реальної системи як об'єкта дослідження

Нещодавній прогрес у галузі інформаційних технологій призвів до різкого збільшення інтернет-трафіку. Нині виникає заклопотаність з приводу нестачі бездротових ресурсів, таких як смуга пропускання, виділена неліцензованим користувачам.

Очікується, що когнітивний бездротовий зв'язок вирішить проблему нестачі смуги пропускання. Когнітивні бездротові мережі поділяють користувачів на два класи: первинні користувачі та вторинні користувачі. Первинні користувачі ліцензовані і мають виділену смугу пропускання, в той час як вторинні можуть використовувати цю смугу пропускання тільки в разі потреби і її доступності. При міжмережевому доступі вторинні користувачі можуть передавати з максимальною потужністю тільки тоді, коли відсутні первинні. Ця парадигма також відома як класичне когнітивне радіо. У цій роботі розглянемо детально ситуацію, коли неліцензовані користувачі повинні визначати доступність каналу перед використанням частотних діапазонів. Якщо такий користувач знаходить канал вільним, він займає його і починає зв'язок. В іншому разі вторинний користувач має знову спробувати виявити вільний канал через якийсь випадковий час. Така поведінка виявлення вільного каналу вторинними користувачами нагадує повторні черги. У RQ-системах клієнти, що надходять, входять у віртуальну кімнату очікування, звану орбітою, якщо канал зайнятий, і знову звертаються до приладу після випадкового часу очікування, поки вони успішно не завершать обслуговування..

Новий ліцензований користувач може використовувати канал і передавати дані, якщо канал не зайнятий іншим первинним користувачем, інакше він блокується і залишає систему.

При надходженні нового ліцензованого користувача в систему, де канал зайнятий обслуговуванням неліцензованого користувача, первинний користувач перериває передачу вторинного і використовує цей канал. Перерваний неліцензований користувач повинен увійти на орбіту для очікування повторного обслуговування.

У цій роботі ми моделюємо когнітивні бездротові мережі як систему масового обслуговування (рисунок 1). Первинних і вторинних користувачів розглядатимемо як заявки вхідного потоку першого і другого типу, відповідно. Процес передавання даних первинними та вторинними користувачами моделюватимемо часом обслуговування відповідної заявки обслуговуючим приладом у запропонованій математичній моделі.

Неліцензовані користувачі в разі зайнятості обслуговуючого приладу відправляються на орбіту, де здійснюють випадкову затримку, після якої знову намагаються зайняти прилад.

Малюнок 1 – Приклад реальної системи

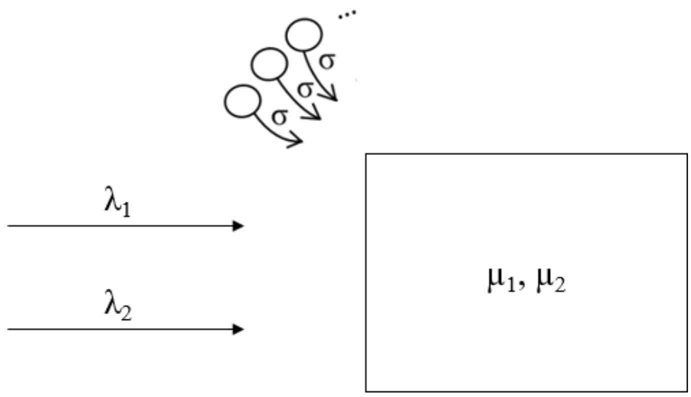
1.2 Математична модель системи та постановка задачі

У цьому розділі наведено опис математичної моделі у вигляді RQ-системи з повторними викликами, експоненціальним часом обслуговування і пріоритетними заявками.

1.2.1 Математична модель RQ-системи M2|M2|1 із пріоритетними заявками

Ми розглядаємо RQ-систему M2|M2|1 з пріоритетними заявками (рисунок 2). На вхід системи надходять два найпростіші потоки подій з інтенсивністю $\lambda 1$ і $\lambda 2$ відповідно. Якщо прилад вільний, то заявки першого і другого потоків, що надходять у систему, займають його для обслуговування. Заявки першого і другого потоків обслуговуються експоненціальний випадковий час із параметрами $\mu 1$ і $\mu 2$ відповідно.

Якщо заявка першого потоку, що надійшла, застає прилад зайнятим обслуговуванням заявки першого потоку, вона втрачається. Якщо заявка першого потоку, що надійшла, застає прилад зайнятим обслуговуванням заявки другого потоку, вона витісняє заявку другого потоку на орбіту, де та здійснює випадкову затримку протягом експонентного часу з параметром σ, а сама починає обслуговуватися експонентний час із параметром $\mu 1$. Якщо заявка другого потоку, що надійшла, застає прилад зайнятим обслуговуванням заявки першого або другого потоку, вона не губиться, а йде на орбіту, де здійснює випадкову затримку протягом експоненціального часу з параметром σ.



Малюнок 2 - RQ-система M2|M2|1 з пріоритетними заявками

Позначимо процес k(t) - стан приладу в момент часу t. Цей процес може набувати таких значень: 0 - прилад вільний, 1 - прилад зайнятий обслуговуванням заявки першого потоку, 2 - прилад зайнятий обслуговуванням заявки другого потоку. Також введемо випадковий процес i(t) - кількість заявок на орбіті в момент часу t.

1.2.2 Система диференціальних рівнянь Колмогорова

Ставиться завдання знаходження стаціонарного розподілу ймовірностей значень процесу $\{k(t), i(t)\}$.

Для розподілу ймовірностей

$$P_k(i,t) = P\{k(t) = k, i(t) = i\},$$

складемо систему Колмогорова. Запишемо рівності

$$P_0(i,t+\Delta t) = P_0(i,t)(1-\lambda_1\Delta t)(1-\lambda_2\Delta t)(1-i\sigma\Delta t) +$$
$$+\mu_1\Delta t P_1(i,t) + \mu_2\Delta t P_2(i,t) + o(\Delta t),$$
$$P_1(i,t+\Delta t) = P_1(i,t)(1-\lambda_2\Delta t)(1-\mu_1\Delta t) + \lambda_1\Delta t P_0(i,t) +$$
$$+\lambda_2\Delta t P_1(i-1,t) + \lambda_1\Delta t P_2(i-1,t) + o(\Delta t),$$

$$P_2(i,t+\Delta t)=P_2(i,t)(1-\lambda_1\Delta t)(1-\lambda_2\Delta t)(1-\mu_2\Delta t)+\lambda_2\Delta t P_0(i,t)+$$
$$+\sigma(i+1)\Delta t P_0(i+1,t)+\lambda_2\Delta t P_2(i-1,t)+o(\Delta t).$$

Перетворимо останню систему:

$$P_0(i,t+\Delta t)=P_0(i,t)(1-(\lambda_1+\lambda_2+i\sigma)\Delta t)+$$
$$+\mu_1\Delta t P_1(i,t)+\mu_2\Delta t P_2(i,t)+o(\Delta t),$$
$$P_1(i,t+\Delta t)=P_1(i,t)(1-(\lambda_2+\mu_1)\Delta t)+\lambda_1\Delta t P_0(i,t)+$$
$$+\lambda_2\Delta t P_1(i-1,t)+\lambda_1\Delta t P_2(i-1,t)+o(\Delta t),$$
$$P_2(i,t+\Delta t)=P_2(i,t)(1-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)\Delta t)+\lambda_2\Delta t P_0(i,t)+$$
$$+\sigma(i+1)\Delta t P_0(i+1,t)+\lambda_2\Delta t P_2(i-1,t)+o(\Delta t).$$

Отримаємо

$$\frac{P_0(i,t+\Delta t)-P_0(i,t)}{\Delta t}=-(\lambda_1+\lambda_2+i\sigma)P_0(i,t)+$$
$$+\mu_1 P_1(i,t)+\mu_2 P_2(i,t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t},$$
$$\frac{P_1(i,t+\Delta t)-P_1(i,t)}{\Delta t}=-(\lambda_2+\mu_1)P_1(i,t)+\lambda_1 P_0(i,t)+$$
$$+\lambda_2 P_1(i-1,t)+\lambda_1 P_2(i-1,t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t},$$
$$\frac{P_2(i,t+\Delta t)-P_2(i,t)}{\Delta t}=-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)P_2(i,t)+\lambda_2 P_0(i,t)+$$
$$+\sigma(i+1)P_0(i+1,t)+\lambda_2 P_2(i-1,t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Перейдемо до межі при $\Delta t\to 0$:

$$\frac{\partial P_0(i,t)}{\partial t} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + i\sigma)P_0(i,t) + \mu_1 P_1(i,t) + \mu_2 P_2(i,t),$$

$$\frac{\partial P_1(i,t)}{\partial t} = -(\lambda_2 + \mu_1)P_1(i,t) + \lambda_1 P_0(i,t) + \lambda_2 P_1(i-1,t) + \lambda_1 P_2(i-1,t),$$

$$\frac{\partial P_2(i,t)}{\partial t} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)P_2(i,t) + \lambda_2 P_0(i,t) +$$

$$+\sigma(i+1)P_0(i+1,t) + \lambda_2 P_2(i-1,t). \qquad (1)$$

Запишемо систему (1) у стаціонарному режимі

$$-(\lambda_1 + \lambda_2 + i\sigma)P_0(i) + \mu_1 P_1(i) + \mu_2 P_2(i) = 0,$$

$$-(\lambda_2 + \mu_1)P_1(i) + \lambda_1 P_0(i) + \lambda_2 P_1(i-1) + \lambda_1 P_2(i-1) = 0,$$

$$-(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)P_2(i) + \lambda_2 P_0(i) + \sigma(i+1)P_0(i+1) + \lambda_2 P_2(i-1) = 0. \qquad (2)$$

Ця система буде основною в подальших дослідженнях.

1.3 Ітераційний (рекурентний) алгоритм для RQ-системи M2|M2|1

Позначимо через $\Pi_k(i)$ стаціонарні ймовірності процесу $\{k(t), i(t)\}$.

Перепишемо систему (2) для $i = 0$:

$$-(\lambda_1 + \lambda_2)\Pi_0(0) + \mu_1\Pi_1(0) + \mu_2\Pi_2(0) = 0,$$

$$-(\lambda_2 + \mu_1)\Pi_1(0) + \lambda_1\Pi_0(0) = 0,$$

$$-(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2)\Pi_2(0) + \lambda_2\Pi_0(0) + \sigma\Pi_0(1) = 0.$$

Для $i \geq 1$:

$$-(\lambda_1 + \lambda_2 + i\sigma)\Pi_0(i) + \mu_1\Pi_1(i) + \mu_2\Pi_2(i) = 0,$$

$$-(\lambda_2+\mu_1)\Pi_1(i)+\lambda_1\Pi_0(i)+\lambda_2\Pi_1(i-1)+\lambda_1\Pi_2(i-1)=0,$$
$$-(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)\Pi_2(i)+\lambda_2\Pi_0(i)+\sigma(i+1)\Pi_0(i+1)+\lambda_2\Pi_2(i-1)=0.$$

Для розв'язання отриманих систем побудуємо рекурентний алгоритм. Покладемо $\Pi_0(0) = a$, де a – довільна додатна константа. Запишемо рівності для $i = 0$:

$$\Pi_1(0)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2+\mu_1}\Pi_0(0),$$
$$\Pi_2(0)=\frac{1}{\mu_2}\Big((\lambda_1+\lambda_2)\Pi_0(0)-\mu_1\Pi_1(0)\Big),$$
$$\Pi_0(1)=\frac{1}{\sigma}\Big((\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)\Pi_2(0)-\lambda_2\Pi_0(0)\Big).$$

Для $i \geq 1$:

$$\Pi_1(i)=\frac{1}{\lambda_2+\mu_1}\big(\lambda_1\Pi_0(i)+\lambda_2\Pi_1(i-1)+\lambda_1\Pi_2(i-1)\big),$$
$$\Pi_2(i)=\frac{1}{\mu_2}\Big((\lambda_1+\lambda_2+i\sigma)\Pi_0(i)-\mu_1\Pi_1(i)\Big),$$
$$\Pi_0(i+1)=\frac{1}{(i+1)\sigma}\Big((\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)\Pi_2(i)-\lambda_2\Pi_0(i)-\lambda_2\Pi_2(i-1)\Big). \qquad (3)$$

Розв'язуючи систему (3),найдемо

Застосовуючи умову нормування, запишемо стаціонарний розподіл імовірностей числа заявок на орбіті

$$Pstat(i)=\frac{\Pi(i)}{\sum_{i=0}^{N}\Pi(i)}. \qquad (4)$$

1.4 Метод асимптотично-дифузійного аналізу дослідження системи з повторними викликами та пріоритетними заявками $M_2|M_2|1$

Уведемо часткові характеристичні функції, позначивши $j = \sqrt{-1}$

$$H_k(u,t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} P_k(i,t), \quad k = \overline{0,2}.$$

Зробимо заміни в системі (1), отримаємо систему

$$\frac{\partial H_0(u,t)}{\partial t} = -(\lambda_1 + \lambda_2) H_0(u,t) + j\sigma \frac{\partial H_0(u,t)}{\partial u} + \mu_1 H_1(u,t) + \mu_2 H_2(u,t),$$

$$\frac{\partial H_1(u,t)}{\partial t} = (\lambda_2 (e^{ju} - 1) - \mu_1) H_1(u,t) + \lambda_1 H_0(u,t) + \lambda_1 e^{ju} H_2(u,t),$$

$$\frac{\partial H_2(u,t)}{\partial t} = (\lambda_2 (e^{ju} - 1) - \lambda_1 - \mu_2) H_2(u,t) + \lambda_2 H_0(u,t) - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H_0(u,t)}{\partial u}. \quad (5)$$

Підсумовуючи рівняння системи (5), отримаємо додаткове рівняння,

$$\frac{\partial H(u,t)}{\partial t} = (e^{ju} - 1)\left\{ j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H_0(u,t)}{\partial u} + \lambda_2 H_1(u,t) + (\lambda_1 + \lambda_2) H_2(u,t) \right\}, \quad (6)$$

яке нам знадобиться для подальшого аналізу. Систему (5) - (6) будемо розв'язувати методом асимптотично-дифузійного аналізу в граничній умові $\sigma \to 0$. Проведемо побудову дифузійної апроксимації в кілька етапів.

1.4.1 Перший етап асимптотично-дифузійного аналізу

Позначимо $\sigma = \varepsilon$, робимо заміни

$$\tau = t\varepsilon,\ \ u = \varepsilon w,\ \ H_k(u,t) = F_k(w, \tau, \varepsilon).$$

Отримаємо систему

$$\varepsilon \frac{\partial F_0(w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} = -(\lambda_1 + \lambda_2)F_0(w,\tau,\varepsilon) + j\frac{\partial F_0(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} +$$

$$+\mu_1 F_1(w,\tau,\varepsilon) + \mu_2 F_2(w,\tau,\varepsilon),$$

$$\varepsilon \frac{\partial F_1(w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} = (\lambda_2(e^{j\varepsilon w} - 1) - \mu_1)F_1(w,\tau,\varepsilon) + \lambda_1 F_0(w,\tau,\varepsilon) + \lambda_1 e^{j\varepsilon w} F_2(w,\tau,\varepsilon),$$

$$\varepsilon \frac{\partial F_2(w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} = (\lambda_2(e^{j\varepsilon w} - 1) - \lambda_1 - \mu_2)F_2(w,\tau,\varepsilon) + \lambda_2 F_0(w,\tau,\varepsilon) - je^{-j\varepsilon w}\frac{\partial F_0(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w},$$

$$\varepsilon \frac{\partial F(w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} = (e^{j\varepsilon w} - 1)\times$$

$$\times\left\{ je^{-j\varepsilon w}\frac{\partial F_0(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} + \lambda_2 F_1(w,\tau,\varepsilon) + (\lambda_1 + \lambda_2)F_2(w,\tau,\varepsilon)\right\}. \quad (7)$$

Теорема 1 У розглянутій RQ-системі *$M_2|M_2|1$ компоненти граничних при* $\varepsilon \to 0$ *значень* $r_k = r_k(x)$ *ймовірностей станів приладу, визначається системою*

$$-(\lambda_1 + \lambda_2 + x)r_0 + \mu_1 r_1 + \mu_2 r_2 = 0,$$

$$-\mu_1 r_1 + \lambda_1 r_0 + \lambda_1 r_2 = 0,$$

$$-(\lambda_1 + \mu_2)r_2 + (\lambda_2 + x)r_0 = 0,$$

$$\sum_{k=0}^{2} r_k = 1. \quad (8)$$

Здесь $x = x(\tau)$ *є розв'язком рівняння*

$$x'(\tau) = -x(\tau)r_0 + \lambda_2 r_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)r_2. \quad (9)$$

Доказ. В системі (7) спрямуємо $\varepsilon \to 0$, позначив $F_n(w,\tau,\varepsilon) = F_n(w,\tau), \quad n=\overline{0,2},$ отримуємо

$$-(\lambda_1+\lambda_2)F_0(w,\tau) + j\frac{\partial F_0(w,\tau)}{\partial w} + \mu_1 F_1(w,\tau) + \mu_2 F_2(w,\tau) = 0,$$

$$-\mu_1 F_1(w,\tau) + \lambda_1 F_0(w,\tau) + \lambda_1 F_2(w,\tau) = 0,$$

$$-(\lambda_1+\mu_2)F_2(w,\tau) + \lambda_2 F_0(w,\tau) - j\frac{\partial F_0(w,\tau)}{\partial w} = 0,$$

$$\frac{\partial F(w,\tau)}{\partial \tau} = jw\left\{ j\frac{\partial F_0(w,\tau)}{\partial w} + \lambda_2 F_1(w,\tau) + (\lambda_1+\lambda_2)F_2(w,\tau)\right\}. \qquad (10)$$

Рішення системи рівнянь (10) будемо шукати у вигляді

$$F_k(w,\tau) = r_k e^{jwx(\tau)}, \quad k=\overline{0,2}. \qquad (11)$$

Здесь r_k – стаціонарний розподіл імовірностей станів приладу, $x = x(\tau)$ – скалярна функція аргументу τ, яка визначає при $\varepsilon \to 0$, нормоване величиною $\varepsilon = \sigma$, среднє значення $\sigma i(\tau/\sigma)$ – числа заявок на орбіті. Підставляючи добуток (11) у систему (10), отримаємо

$$-(\lambda_1+\lambda_2+x)r_0 + \mu_1 r_1 + \mu_2 r_2 = 0,$$

$$-\mu_1 r_1 + \lambda_1 r_0 + \lambda_1 r_2 = 0,$$

$$-(\lambda_1+\mu_2)r_2 + (\lambda_2+x)r_0 = 0,$$

$$x'(\tau) = -x(\tau)r_0 + \lambda_2 r_1 + (\lambda_1+\lambda_2)r_2. \qquad (12)$$

Система (12) для $r_k = r_k(x)$ є однорідною системою лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язок якої залежить від значень х функції $x(\tau)$. **Теорему доведено.**

З системи (8) найдемо r_k з урахуванням умов нормування

Також обозначимо функцію $a(x)$

$$a(x) = -xr_0(x) + \lambda_2 r_1(x) + (\lambda_1 + \lambda_2) r_2(x). \tag{13}$$

Нижче буде показано, що ця функція має сенс коефіцієнта перенесення дифузійного процесу, що визначає асимптотичний розподіл імовірностей числа заявок на орбіті.

1.4.2 Другий етап асимптотично-дифузійного аналізу

В системі (5) й рівняння (6) введемо зміни

$$H_k(u,t) = e^{j\frac{u}{\sigma}x(\sigma t)} H_k^{(2)} \quad k = \overline{0, N+1},$$

та отримаємо систему рівнянь.

$$\frac{\partial H_0^{(2)}(u,t)}{\partial t} + jux'(\sigma t)H_0^{(2)}(u,t) = -\big(\lambda_1 + \lambda_2 + x(\sigma t)\big)H_0^{(2)}(u,t) +$$

$$+ j\sigma \frac{\partial H_0^{(2)}(u,t)}{\partial u} + \mu_1 H_1^{(2)}(u,t) + \mu_2 H_2^{(2)}(u,t),$$

$$\frac{\partial H_1^{(2)}(u,t)}{\partial t}+jux'(\sigma t)H_1^{(2)}(u,t)=(\lambda_2(e^{ju}-1)-\mu_1)H_1^{(2)}(u,t)+$$

$$+\lambda_1 H_0^{(2)}(u,t)+\lambda_1 e^{ju}H_2^{(2)}(u,t),$$

$$\frac{\partial H_2^{(2)}(u,t)}{\partial t}+jux'(\sigma t)H_2^{(2)}(u,t)=(\lambda_2(e^{ju}-1)-\lambda_1-\mu_2)H_2^{(2)}(u,t)+$$

$$+(\lambda_2+x(\sigma t)e^{-ju})H_0^{(2)}(u,t)-j\sigma e^{-ju}\frac{\partial H_0^{(2)}(u,t)}{\partial u},$$

$$\frac{\partial H^{(2)}(u,t)}{\partial t}+jux'(\sigma t)H^{(2)}(u,t)=(e^{ju}-1)\Big\{-x(\sigma t)e^{-ju}H_0^{(2)}(u,t)+$$

$$\left.+j\sigma e^{-ju}\frac{\partial H_0^{(2)}(u,t)}{\partial u}+\lambda_2 H_1^{(2)}(u,t)+(\lambda_1+\lambda_2)H_2^{(2)}(u,t)\right\}. \qquad (14)$$

Обозначивши $\sigma = \varepsilon^2$ й зробивши заміни в системі (14)

$$\tau = \varepsilon^2 t,\ u = \varepsilon w,\ H_k^{(2)}(u,t) = F_k^{(2)}(w,\tau,\varepsilon),\ k=\overline{0,2},$$

отримуємо систему

$$\varepsilon^2\frac{\partial F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}+j\varepsilon wa(x)F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)=-\left(\lambda_1+\lambda_2+x(\tau)\right)F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)+$$

$$+j\varepsilon\frac{\partial F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}+\mu_1 F_1^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)+\mu_2 F_2^{(2)}(w,\tau,\varepsilon),$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial F_1^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}+j\varepsilon wa(x)F_1^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)=(\lambda_2(e^{j\varepsilon w}-1)-\mu_1)F_1^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)+$$

$$+\lambda_1 F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)+\lambda_1 e^{j\varepsilon w}F_2^{(2)}(w,\tau,\varepsilon),$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial F_2^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}+j\varepsilon wa(x)F_2^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)=(\lambda_2(e^{j\varepsilon w}-1)-\lambda_1-\mu_2)F_2^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)+$$

$$+(\lambda_2+xe^{-j\varepsilon w})F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)-j\varepsilon e^{-j\varepsilon w}\frac{\partial F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w},$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} + j\varepsilon w a(x) F^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) = (e^{j\varepsilon w}-1)\Big\{ -xe^{-j\varepsilon w} F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) +$$

$$+ j\varepsilon e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} + \lambda_2 F_1^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) + (\lambda_1+\lambda_2) F_2^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) \Big\}. \quad (15)$$

Доведемо таке твердження.

Теорема 2 *Функції* $F_k^{(2)}(w,\tau)$ *мають вигляд*

$$F_k^{(2)}(w,\tau) = \Phi\big(w,\tau\big) r_k(x), \;\; k = \overline{0,2}, \quad (16)$$

где $r_k = r_k(x)$, *що залежать від значень параметра x, визначені системою (8) в теоремі 1, а скалярна функція* $\Phi(w, \tau)$ *є розв'язком рівняння*

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau} = a'(x) w \frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial w} + b(x) \frac{\left(jw\right)^2}{2} \Phi(w,\tau). \quad (17)$$

Йому-тут функція $a(x)$ *визначається рівністю* (13), *а скалярна функція* $b(x)$ *має вигляд*

$$b(x) = b(x;\tau) = a(x) + 2\big(-xg_0(x) + \lambda_2 g_1(x) + (\lambda_1+\lambda_2) g_2(x) + xr_0(x)\big), \quad (18)$$

де функції $g_k = g_k(x)$ *визначаються системою рівнянь*

$$-\big(\lambda_1+\lambda_2+x\big) g_0 + \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 = a(x) r_0,$$

$$-\mu_1 g_1 + \lambda_1 g_0 + \lambda_1 g_2 = a(x) r_1 - \lambda_2 r_1 - \lambda_1 r_2,$$

$$-(\lambda_1+\mu_2) g_2 + (\lambda_2 + x) g_0 = a(x) r_2 - \lambda_2 r_2 + x r_0, \quad (19)$$

2

$$\sum_{k=0} g_k = 0.$$

Доказ. У перших трьох рівняннях системи (15) розкладемо експоненти в ряд Тейлора і згрупуємо доданки порядку малості не вище ε

$$j\varepsilon w a(x) F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) = -\left(\lambda_1 + \lambda_2 + x\right) F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) +$$

$$+ j\varepsilon \frac{\partial F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} + \mu_1 F_1^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) + \mu_2 F_2^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) + O(\varepsilon^2),$$

$$j\varepsilon w a(x) F_1^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) = (j\varepsilon w \lambda_2 - \mu_1) F_1^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) +$$

$$+\lambda_1 F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) + \lambda_1 (1 + j\varepsilon w) F_2^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) + O(\varepsilon^2),$$

$$j\varepsilon w a(x) F_2^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) = (j\varepsilon w \lambda_2 - \lambda_1 - \mu_2) F_2^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) +$$

$$+(\lambda_2 + x(1 - j\varepsilon w)) F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) - j\varepsilon \frac{\partial F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} + O(\varepsilon^2). \qquad (20)$$

Будемо шукати рішення системи (20) у вигляді

$$F_k^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)=\Phi\big(w,\tau\big)\left\{r_k+j\varepsilon w f_k\right\}+O\big(\varepsilon^2\big), k=\overline{0,2}, \tag{21}$$

де $r_k = r_k(x;\tau)$. Отримаємо

$$j\varepsilon w a(x)\Phi(w,\tau)r_0=-\big(\lambda_1+\lambda_2+x\big)jw\varepsilon\Phi(w,\tau)f_0+$$
$$+j\varepsilon\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial w}r_0+jw\varepsilon\Phi(w,\tau)\mu_1 f_1+jw\varepsilon\Phi(w,\tau)\mu_2 f_2+O(\varepsilon^2),$$
$$j\varepsilon w a(x)\Phi(w,\tau)r_1=jw\varepsilon\lambda_2\Phi(w,\tau)r_1-jw\varepsilon\mu_1\Phi(w,\tau)f_1+$$
$$+j\varepsilon w\lambda_1\Phi(w,\tau)f_0+j\varepsilon w\lambda_1\Phi(w,\tau)f_2+j\varepsilon w\lambda_1\Phi(w,\tau)r_2+O(\varepsilon^2),$$
$$j\varepsilon w a(x)\Phi(w,\tau)r_2=j\varepsilon w\lambda_2\Phi(w,\tau)r_2-j\varepsilon w(\lambda_1+\mu_2)\Phi(w,\tau)f_2+$$
$$+jw\varepsilon(\lambda_2+x)\Phi(w,\tau)f_0-jw\varepsilon x\Phi(w,\tau)r_0-j\varepsilon\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial w}r_0+O(\varepsilon^2).$$

Розділимо рівняння системи на $j\varepsilon w\Phi(w,\tau)$ й у межі з $\varepsilon\to 0$ отримуємо

$$-\big(\lambda_1+\lambda_2+x\big)f_0+\mu_1 f_1+\mu_2 f_2=a(x)r_0-\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)}r_0,$$
$$-\mu_1 f_1+\lambda_1 f_0+\lambda_1 f_2=a(x)r_1-\lambda_2 r_1-\lambda_1 r_2,$$
$$-(\lambda_1+\mu_2)f_2+(\lambda_2+x)f_0=a(x)r_2-\lambda_2 r_2+x r_0+\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)}r_0. \tag{22}$$

Застосовуючи принцип суперпозиції для неоднорідних систем, розв'язання $f(x)$ цієї системи рівнянь запишемо у вигляді суми.

$$f_k = Cr_k + g_k - \varphi_k \frac{\partial \Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)}, \qquad (23)$$

яке підставимо в (22), отримаємо системи рівнянь

$$-(\lambda_1 + \lambda_2 + x)\varphi_0 + \mu_1\varphi_1 + \mu_2\varphi_2 = r_0,$$
$$-\mu_1\varphi_1 + \lambda_1\varphi_0 + \lambda_1\varphi_2 = 0,$$
$$-(\lambda_1 + \mu_2)\varphi_2 + (\lambda_2 + x)\varphi_0 = -r_0. \qquad (24)$$

$$-(\lambda_1 + \lambda_2 + x)g_0 + \mu_1 g_1 + \mu_2 g_2 = a(x)r_0,$$
$$-\mu_1 g_1 + \lambda_1 g_0 + \lambda_1 g_2 = a(x)r_1 - \lambda_2 r_1 - \lambda_1 r_2,$$
$$-(\lambda_1 + \mu_2)g_2 + (\lambda_2 + x)g_0 = a(x)r_2 - \lambda_2 r_2 + x r_0. \qquad (25)$$

Звернемо увагу на систему рівнянь (24). Якщо ми продиференціюємо за x систему рівнянь (12), то отримана система ідентична системі рівнянь (24), з чого можемо зробити висновок, що

$$\varphi_k = \varphi_k(x;\tau) = \frac{\partial r_k(x)}{\partial x}, \quad \sum_{k=0}^{2} \varphi_k = 0,$$

де останнє співвідношення отримано шляхом диференціювання умови нормування для розподілу $r_k(x, \tau)$ за x.

Система (25) має нескінченне число розв'язків, оскільки визначник матриці системи дорівнює нулю і ранг матриці системи збігається з рангом розширеної матриці системи. Накладемо на невідомі g_k додаткова

умова $\sum_{k=0}^{2} g_k = 0$ и отримаємо систему рівнянь

$$
\begin{gathered}
-(\lambda_1+\lambda_2+x)g_0+\mu_1 g_1+\mu_2 g_2=a(x)r_0,\\
-\mu_1 g_1+\lambda_1 g_0+\lambda_1 g_2=a(x)r_1-\lambda_2 r_1-\lambda_1 r_2,\\
-(\lambda_1+\mu_2)g_2+(\lambda_2+x)g_0=a(x)r_2-\lambda_2 r_2+xr_0,\\
\sum_{k=0}^{2} g_k=0,
\end{gathered}
\tag{26}
$$

яка має єдиний розв'язок.

Зазначимо, що система (26), яка визначає $g_k(x)$, збігається із системою (19), отже, твердження (19) формулювання теореми правильне.

Звернемося до останнього рівняння системи (15). У цьому рівнянні згрупуємо доданки порядку малості не вище за ε^2

$$
\varepsilon^2\frac{\partial F^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}+j\varepsilon w a(x)F^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)=\left(j\varepsilon w+\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\right)\Big\{j\varepsilon\frac{\partial F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}-
$$
$$
-x(1-jw\varepsilon)F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)+\lambda_2 F_1^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)+(\lambda_1+\lambda_2)F_2^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)\Big\}+O(\varepsilon^3).
$$

Підставимо розкладання (21) в отримане рівняння з урахуванням (13)

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial \tau} + (j\varepsilon w)^2 a(x)\Phi(w,\tau)\sum_{k=0}^{2} f_k = j\varepsilon w\Big\{ j\varepsilon \frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial w} r_0 +$$

$$+ jw\varepsilon x\Phi(w,\tau)r_0 - jw\varepsilon x\Phi(w,\tau) f_0 + jw\varepsilon\lambda_2\Phi(w,\tau) f_1 + jw\varepsilon(\lambda_1+\lambda_2)\Phi(w,\tau) f_2\Big\} +$$

$$+\frac{(j\varepsilon w)^2}{2}\{-x\Phi(w,\tau)r_0 + \lambda_2\Phi(w,\tau)r_1 + (\lambda_1+\lambda_2)\Phi(w,\tau)r_2\} + O(\varepsilon^3).$$

Розділимо рівняння на ε^2 і перейдемо до межі при $\varepsilon \to 0$

$$\frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial \tau} = (jw)^2\Big\{ -a(x)\sum_{k=0}^{2} f_k + xr_0 - xf_0 + \lambda_2 f_1 + (\lambda_1+\lambda_2) f_2\Big\}\Phi(w,\tau) +$$

$$+ j^2 w\frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial w} r_0 + \frac{(jw)^2}{2}\{-xr_0 + \lambda_2 r_1 + (\lambda_1+\lambda_2)r_2\}\Phi(w,\tau),$$

$\partial\tau$

в яке підставимо розкладання (23)

$$\frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial \tau} = (jw)^2\{xr_0 - xg_0 + \lambda_2 g_1 + (\lambda_1+\lambda_2) g_2\}\Phi(w,\tau) -$$

$$-(jw)^2\{-x\varphi_0 + \lambda_2\varphi_1 + (\lambda_1+\lambda_2)\varphi_2 - r_0\}\frac{\partial \Phi(w,\tau)/\partial w}{w} +$$

$$+\frac{(jw)^2}{2}\{-xr_0 + \lambda_2 r_1 + (\lambda_1+\lambda_2)r_2\}\Phi(w,\tau).$$

Звернемо увагу на множник

$$-x\varphi_0 + \lambda_1\varphi_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)\varphi_2 - r_0 =$$

$$= -x\frac{\partial r_0(x)}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial r_1(x)}{\partial x} + (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{\partial r_2(x)}{\partial x} - r_0(x) = a'(x).$$

Обозначимо також

$$b(x) = b(x;\tau) = a(x) + 2\left(-xg_0(x) + \lambda_2 g_1(x) + (\lambda_1 + \lambda_2)g_2(x) + xr_0(x)\right). \quad (27)$$

Тоді наше рівняння перепишеться у вигляді

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau} = a'(x)w\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial w} + b(x)\frac{(jw)^2}{2}\Phi(w,\tau), \quad (28)$$

яке збігається з (17).

Нижче буде показано, що функція $b(x)$ має сенс коефіцієнта дифузії того дифузійного процесу, для якого коефіцієнтом переносу є функція $a(x)$. Теорему доведено.

1.4.3 Побудова дифузійної апроксимації

У цьому розділі розглянемо реалізацію методу асимптотично дифузійного аналізу для знаходження розподілу ймовірностей значень граничного при $\sigma \to 0$ процесу для числа $i(t)$ заявок на орбіті розглянутої системи з повторними викликами і пріоритетними заявками.

Застосувавши обернене перетворення Фур'є до рівняння (28), отримаємо рівняння Фоккера-Планка для густини. $P(y, \tau)$ якийсь процес $y(\tau)$

$$\frac{\partial P(y,\tau)}{\partial \tau} = -a'(x)\frac{\partial\left(yP(y,\tau)\right)}{\partial y} + \frac{b(x)}{2}\frac{\partial^2 P(y,\tau)}{\partial y^2}. \qquad (29)$$

Процес $y(\tau)$ є дифузійним процесом із коефіцієнтом переносу з коефіцієнтом переносу a’(x)y і коефіцієтном дифузії b(x). Для нього можемо записати стохастичне диференціальне рівняння.

$$dy(\tau) = a'(x)\,y(\tau)d\tau + \sqrt{b(x)}d\omega(\tau), \qquad (30)$$

Щоб розв’язати це рівняня, потрібно використовувати методи стохастичного аналізу, такі як метод Іто або метод стрибка. Стохастичний аналіз враховує вплив випадкових змін у системі, що дозволяє отримати ймовірнісні властивості процесу.

де $\omega(\tau)$ - вінерівський процес. Далі введемо дифузійний процес $z(\tau) = x(\tau) + \varepsilon y(\tau)$, в якому функція x є рішенням диференціального рівняння

$$dx(\tau) = a(x)d\tau.$$

Тоді дифузійний процес $z(\tau)$ є розв'язком стохастичного диференціального рівняння

$$dz(\tau) = \left[a(x) + \varepsilon a'(x)\, y(\tau)\right]d\tau + \varepsilon\sqrt{b(x)}d\omega(\tau),$$

перетворюючи яке можемо записати

$$dz(\tau) = a(z)d\tau + \varepsilon\sqrt{b(z)}d\omega(\tau). \tag{31}$$

Позначимо функцію щільності процесу $z(\tau)$ як $\Pi(z,\tau) = \dfrac{\partial P\{z(\tau) < z\}}{\partial z}$

запишемо рівняння Фоккера-Планка

$$\frac{\partial \Pi(z,\tau)}{\partial \tau} = -\frac{\partial a(z)\Pi(z,\tau)}{\partial z} + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2 b(z)\Pi(z,\tau)}{\partial z^2}. \tag{32}$$

.

Виконуючи зворотну заміну $\sigma = \varepsilon^2$, переходимо до рівняння для стаціонарної густини процесу $z(\tau)$

$$-\left(a(z)\Pi(z)\right)' + \frac{\sigma}{2}\left(b(z)\Pi(z)\right)'' = 0.$$

Розв'язок отриманого диференціального рівняння має вигляд

$$\Pi(z) = \frac{C}{b(z)} \exp\left\{ \frac{2}{\sigma} \int_0^z \frac{a(x)}{b(x)} dx \right\},$$

де C – константа інтегрування. Дифузійну апроксимацію будуємо за формулою

$$PD(i) = \frac{\Pi(i\sigma)}{\sum_{n=0}^{\infty} \Pi(n\sigma)}. \qquad (33)$$

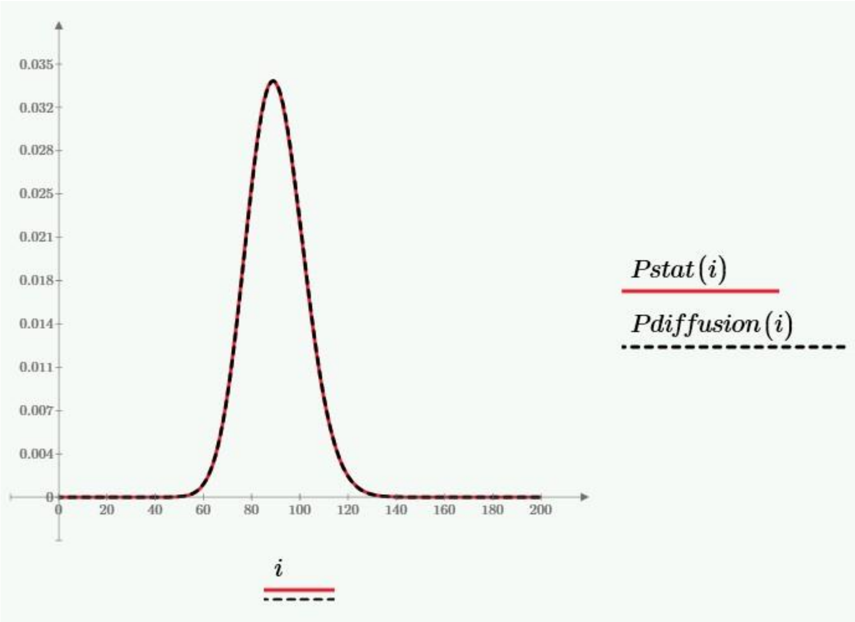
1.5 Чисельний аналіз системи з повторними викликами та пріоритетними заявками

1.5.1 Чисельна реалізація

Для побудови результатів дослідження було використано систему математичних обчислень Mathcad [4, 9].

Знайдемо розподіл імовірностей *Pstat*(*i*), реалізуючи рекурентний алгоритм у вигляді (4), і побудуємо асимптотично дифузійну апроксимацію *Pdiffusion*(*i*) у вигляді (33).

Задавши необхідні початкові параметри: $\lambda_1 = 0{,}9$, $\lambda_2 = 0{,}5$, $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 2$, $\sigma = 0{,}01$, отримаємо графіки розподілу ймовірностей числа заявок на орбіті *Pstat*(*i*) и *Pdiffusion*(*i*) (малюнок 3).



Малюнок 3 – Графіки розподілу ймовірностей числа заявок на орбіті $Pstat(i)$ и $Pdiffusion(i)$

1.5.2 Область применимости асимптотических результатов

Цей пункт присвячено визначенню меж застосовності отриманих аналітичних результатів у параграфі 1.4. Порівнюючи асимптотично дифузійні результати з розподілом, отриманим унаслідок ітераційного (рекурентного) алгоритму, ми можемо визначити за яких значень параметрів асимптотичний розподіл імовірностей близький до граничного.

Точність асимптотично дифузійного аналізу оцінюватимемо за допомогою відстані Колмогорова, що описується формулою

$$\Delta = \max_{0 \le n < \infty} \left| \sum_{i=0}^{n} \big(Pdiffusion(i) - Pstat(i) \big) \right|,$$

де $Pdiffusion(i)$ – апроксимація розподілу ймовірностей числа заявок на орбіті, побудована на основі асимптотично дифузійного аналізу, а

Pstat(*i*) – дограничний розподіл імовірностей числа заявок на орбіті, отриманий у результаті побудови рекурентного алгоритму.

Побудуємо апроксимацію, що ґрунтується на асимптотично дифузійному аналізі (розділ 1.5.1), і порівняємо її з результатом роботи рекурентного алгоритму, реалізованого в тому самому розділі.

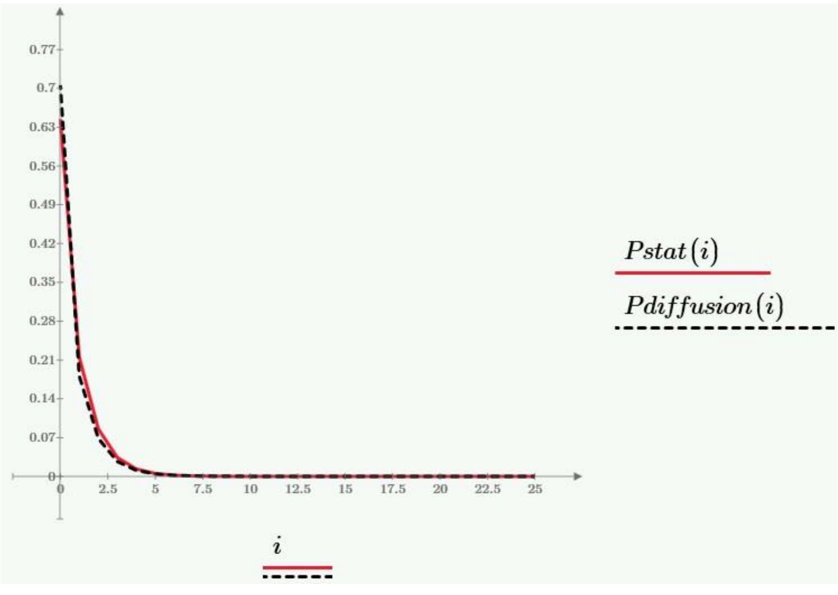
Для цього задамо необхідні параметри для розрахунку: $\lambda_1 = 0{,}9$, $\lambda_2 = 0{,}5$, $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 2$.

В таблиці 1 наведено значення цих відстаней для різних параметрів σ.

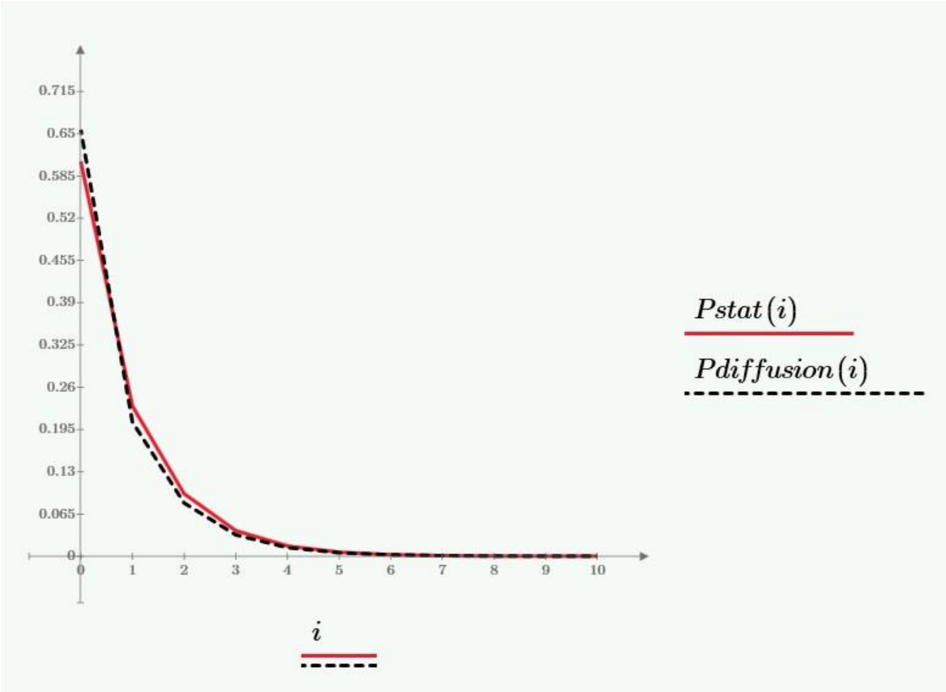
Таблиця 1 – Відстань Колмогорова Δ між рекурентним і асимптотичним розподілами для системи $M_2|M_2|1$

	σ = 3	σ = 2,4	σ = 0,5	σ = 0,1	σ = 0,05
Δ	0,061	**0,049**	**0,022**	**0,008**	**0,006**

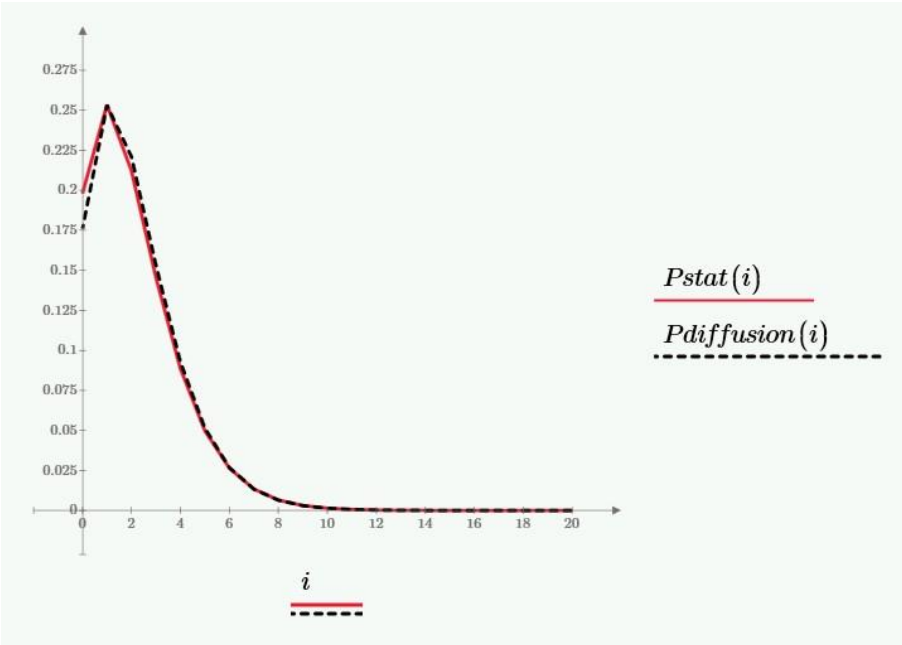
На малюнках 4 - 8 суцільною лінією показано розподіл імовірностей числа заявок на орбіті, отриманий за допомогою ітераційного алгоритму *Pstat*(*i*), пунктирною - апроксимація асимптотично дифузійного аналізу *Pdiffusion*(*i*).



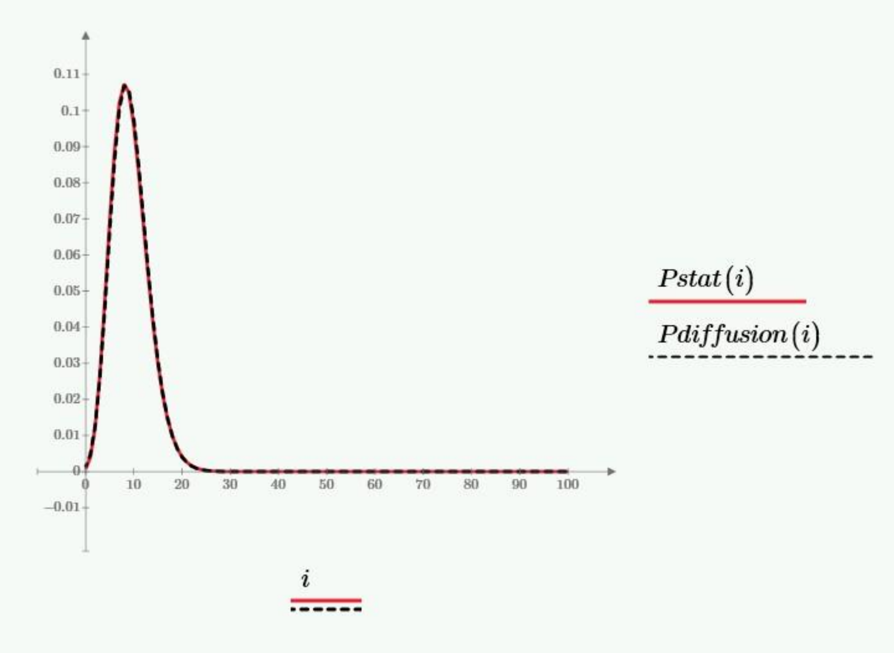
Малюнок 4 – Розподіл імовірностей числа заявок на орбіті при σ = 3



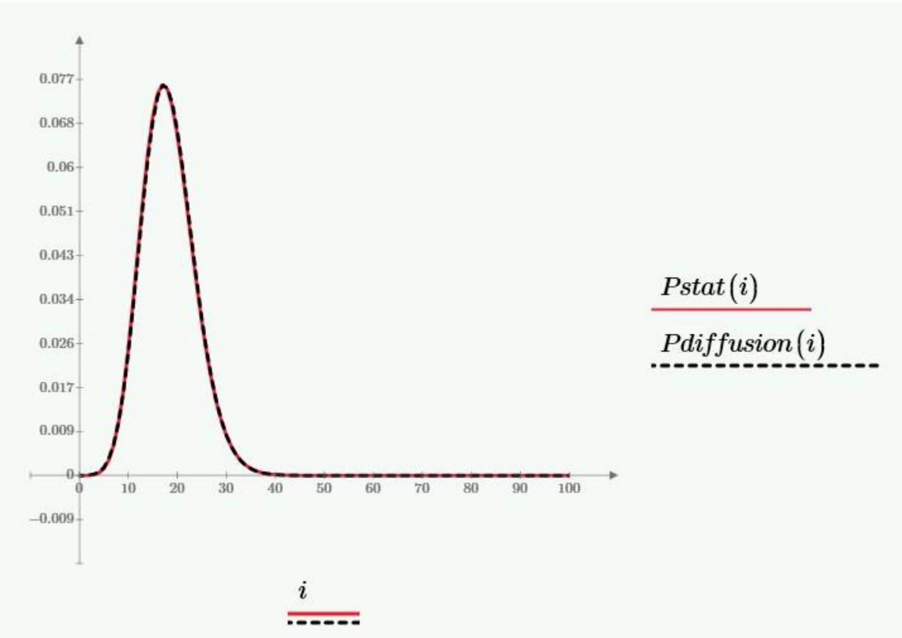
Малюнок 5 – Розподіл імовірностей числа заявок на орбіті при σ = 2,4



Малюнок 6 – Розподіл імовірностей числа заявок на орбіті при σ = 0,5



Малюнок 7 – Розподіл імовірностей числа заявок на орбіті при σ = 0,1



Малюнок 8 – Распределение вероятностей числа заявок на орбите при σ = 0,05

Аналізуючи дані таблиці 1, можна сказати, що точність апроксимації зростає зі зменшенням параметра σ. Наведена апроксимація застосовна для відстані Колмогорова, що не перевищує значення 0,05. Напівжирним у таблиці 1 виділено ті значення, за яких вважатимемо точність апроксимації задовільною. З отриманих значень можна зробити висновок, що апроксимація асимптотично дифузійного аналізу досить точна за параметра σ ≤ 2,4.

2 Дослідження системи $M_2|M$, GI|1 з повторними викликами тапріоритетними заявками

2.1 Математична модель системи та постановка задачі

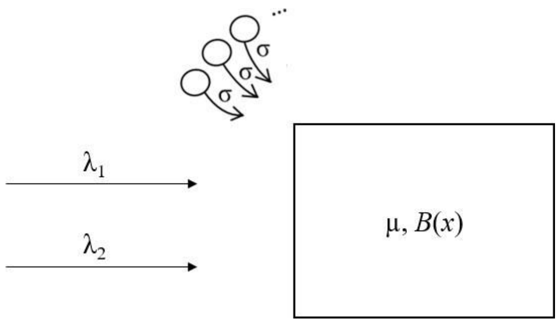
У цьому розділі наведено опис математичної моделі у вигляді RQ-системи з повторними викликами, довільним часом обслуговування непріоритетних заявок.

2.1.1 Математична модель RQ-системи $M_2|M$, GI|1 із пріоритетними заявками

Ми розглядаємо систему M_2 |M, GI|1 з повторними викликами і пріоритетними заявками (рисунок 9). На вхід системи надходять два найпростіших потоки подій з інтенсивністю λ_1 і λ_2 відповідно. Якщо прилад вільний, то заявки першого і другого потоків, що надходять у систему, займають його для обслуговування. Заявки першого потоку обслуговуються експоненціальний випадковий час із параметром μ, заявки другого потоку обслуговуються випадковий час із функцією розподілу $B(x)$.

Якщо заявка першого потоку, що надійшла, застає прилад зайнятим обслуговуванням заявки першого потоку, вона втрачається. Якщо заявка першого потоку, що надійшла, застає прилад зайнятим обслуговуванням заявки другого потоку, вона витісняє заявку другого потоку на орбіту, де та здійснює випадкову затримку протягом експоненціального часу з параметром σ, а сама починає обслуговуватися експоненціальний час з параметром μ.

Якщо заявка другого потоку, що надійшла, застає прилад зайнятим обслуговуванням заявки першого або другого потоку, вона не губиться, а йдена орбіту, де здійснює випадкову затримку протягом експоненціального часу з параметром σ.



Малюнок 9 - RQ-система M_2 |M, GI|1 з пріоритетними заявками

Позначимо процес $k(t)$ - стан приладу в момент часу t. Цей процес може набувати таких значень: 0 - прилад вільний, 1 - прилад зайнятий обслуговуванням заявки першого потоку, 2 - прилад зайнятий обслуговуванням заявки другого потоку. Також введемо випадковий процес $i(t)$ - кількість заявок на орбіті в момент часу t. Позначимо процес $z(t)$ - залишковий час обслуговування, коли $k = 2$.

2.1.2 Система диференціальних рівнянь Колмогорова

Ставиться завдання знаходження стаціонарного розподілу ймовірностей значень процесу $\{k(t), i(t)\}$ за $k = 0, 1, 2$.

Для розподілу ймовірностей

$$P_k(i,t) = P\{k(t) = k, i(t) = i\},\ k = 0, 1,$$

$$P_k(i, z, t) = P\{k(t) = k, i(t) = i, z(t) < z\},\ k = 2,$$

складемо систему Колмогорова. Запишемо рівності

$$P_0(i,t+\Delta t) = P_0(i,t)(1-\lambda_1\Delta t)(1-\lambda_2\Delta t)(1-i\sigma\Delta t) + \mu\Delta t P_1(i,t) + P_2(i,\Delta t,t) + o(\Delta t),$$

$$P_1(i,t+\Delta t) = P_1(i,t)(1-\lambda_2\Delta t)(1-\mu\Delta t) + \lambda_1\Delta t P_0(i,t) +$$

$$+\lambda_2\Delta t P_1(i-1,t) + \lambda_1\Delta t P_2(i-1,\infty,t) + o(\Delta t),$$

$$P_2(i,z-\Delta t,t+\Delta t)=\left[P_2(i,z,t)-P_2(i,\Delta t,t)\right](1-\lambda_1\Delta t)(1-\lambda_2\Delta t)+\lambda_2\Delta tB(z)P_0(i,t)+$$
$$+(i+1)\sigma\Delta tB(z)P_0(i+1,t)+\lambda_2\Delta tP_2(i-1,z,t)+o(\Delta t).$$

Виконавши нескладні перетворення, отримаємо

$$P_0(i,t+\Delta t)=P_0(i,t)(1-(\lambda_1+\lambda_2+i\sigma)\Delta t)+\mu\Delta tP_1(i,t)+P_2(i,\Delta t,t)+o(\Delta t),$$
$$P_1(i,t+\Delta t)=P_1(i,t)(1-(\lambda_2+\mu)\Delta t)+\lambda_1\Delta tP_0(i,t)+$$
$$+\lambda_2\Delta tP_1(i-1,t)+\lambda_1\Delta tP_2(i-1,\infty,t)+o(\Delta t),$$
$$P_2(i,z-\Delta t,t+\Delta t)=\left[P_2(i,z,t)-P_2(i,\Delta t,t)\right](1-(\lambda_1+\lambda_2)\Delta t)+\lambda_2\Delta tB(z)P_0(i,t)+$$
$$+(i+1)\sigma B(z)\Delta tP_0(i+1,t)+\lambda_2\Delta tP_2(i-1,z,t)+o(\Delta t).$$

Маємо

$$\frac{P_0(i,t+\Delta t)-P_0(i,t)}{\Delta t}=-(\lambda_1+\lambda_2+i\sigma)P_0(i,t)+\mu P_1(i,t)+\frac{P_2(i,\Delta t,t)}{\Delta t}+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t},$$
$$\frac{P_1(i,t+\Delta t)-P_1(i,t)}{\Delta t}=-(\lambda_2+\mu)P_1(i,t)+\lambda_1P_0(i,t)+$$
$$+\lambda_2P_1(i-1,t)+\lambda_1P_2(i-1,\infty,t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t},$$
$$\frac{P_2(i,z-\Delta t,t+\Delta t)-P_2(i,z,t)+P_2(i,\Delta t,t)}{\Delta t}=-(\lambda_1+\lambda_2)\left[P_2(i,z,t)-P_2(i,\Delta t,t)\right]+$$
$$+\lambda_2B(z)P_0(i,t)+(i+1)\sigma B(z)P_0(i+1,t)+\lambda_2P_2(i-1,z,t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Перейдемо до межі при $\Delta t\to 0$

$$\frac{\partial P_0(i,t)}{\partial t}=-(\lambda_1+\lambda_2+i\sigma)P_0(i,t)+\mu P_1(i,t)+\frac{\partial P_2(i,0,t)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial P_1(i,t)}{\partial t} = -(\lambda_2 + \mu)P_1(i,t) + \lambda_1 P_0(i,t) + \lambda_2 P_1(i-1,t) + \lambda_1 P_2(i-1,\infty,t),$$

$$\frac{\partial P_2(i,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial P_2(i,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial P_2(i,0,t)}{\partial z} - (\lambda_1 + \lambda_2)P_2(i,z,t) +$$

$$+\lambda_2 B(z)P_0(i,t) + (i+1)\sigma B(z)P_0(i+1,t) + \lambda_2 P_2(i-1,z,t). \qquad (34)$$

2.1.3 Метод характеристичних функцій

Уведемо часткові характеристичні функції, позначивши $j = \sqrt{-1}$

$$H_k(u,t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} P_k(i,t), \quad k = 0,1,$$

$$H_k(u,z,t) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{jui} P_k(i,z,t), \quad k = 2.$$

Зробимо заміни в системі (34). Запишемо систему для характеристичних функцій у вигляді:

$$\frac{\partial H_0(u,t)}{\partial t} = -(\lambda_1 + \lambda_2)H_0(u,t) + j\sigma\frac{\partial H_0(u,t)}{\partial u} + \mu H_1(u,t) + \frac{\partial H_2(u,0,t)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial H_1(u,t)}{\partial t} = (\lambda_2(e^{ju} - 1) - \mu)H_1(u,t) + \lambda_1 H_0(u,t) + \lambda_1 e^{ju} H_2(u,\infty,t),$$

$$\frac{\partial H_2(u,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial H_2(u,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial H_2(u,0,t)}{\partial z} + (\lambda_2(e^{ju} - 1) - \lambda_1)H_2(u,z,t) +$$

$$+\lambda_2 B(z)H_0(u,t) - j\sigma e^{-ju} B(z)\frac{\partial H_0(u,t)}{\partial u}. \qquad (35)$$

У системі (35) спрямуємо $z \to \infty$ і підсумуємо рівняння, позначивши $H_2(u,t) = H_2(u,\infty,t)$, отримаємо додаткове рівняння

$$\frac{\partial H(u,t)}{\partial t}=(e^{ju}-1)\left\{j\sigma e^{-ju}\frac{\partial H_0(u,t)}{\partial u}+\lambda_2 H_1(u,t)+(\lambda_1+\lambda_2)H_2(u,t)\right\}, \quad (36)$$

яке нам знадобиться для подальшого аналізу. Систему (35) - (36) будемо розв'язувати методом асимптотично-дифузійного аналізу в граничній умові $\sigma \to 0$.

2.2 Метод асимптотично-дифузійного аналізу дослідження RQ-системи $_{M2|M}$, GI|1

2.2.1 Перший етап асимптотично дифузійного аналізу

Позначимо $\sigma = \varepsilon$, зробимо заміни

$$\tau = t\varepsilon,\ u = \varepsilon w,\ H_k(u,t) = F_k(w, \tau, \varepsilon)\ k = 0, 1,$$
$$H_k(u,z,t) = F_k(w, z, \tau, \varepsilon),\ k = 2.$$

Перепишемо систему (35) - (36) у вигляді

$$\varepsilon\frac{\partial F_0(w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau}=-(\lambda_1+\lambda_2)F_0(w,\tau,\varepsilon)+j\frac{\partial F_0(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}+\mu F_1(w,\tau,\varepsilon)+\frac{\partial F_2(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z},$$

$$\varepsilon\frac{\partial F_1(w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau}=\left(\lambda_2(e^{j\varepsilon w}-1)-\mu\right)F_1(w,\tau,\varepsilon)+\lambda_1 F_0(w,\tau,\varepsilon)+\lambda_1 e^{j\varepsilon w}F_2(w,\tau,\varepsilon),$$

$$\varepsilon\frac{\partial F_2(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau}=\frac{\partial F_2(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial z}-\frac{\partial F_2(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z}+(\lambda_2(e^{j\varepsilon w}-1)-\lambda_1)F_2(w,z,\tau,\varepsilon)+$$
$$+\lambda_2 B(z)F_0(w,\tau,\varepsilon)-je^{-j\varepsilon w}B(z)\frac{\partial F_0(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w},$$

$$\varepsilon\frac{\partial F(w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau}=(e^{j\varepsilon w}-1)\times$$
$$\times\left\{je^{-j\varepsilon w}\frac{\partial F_0(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w}+\lambda_2 F_1(w,\tau,\varepsilon)+(\lambda_1+\lambda_2)F_2(w,\tau,\varepsilon)\right\}. \quad (37)$$

Теорема 3 *У розглянутій RQ-системі* M_2 *|M, GI|1 компоненти граничних за* $\varepsilon \to 0$ *значень* $r_k = r_k(x)$, $k = 0, 1$, $r_2 = r_2(x, z)$ *ймовірностей станів приладу, визначаються рівносинами*

$$r_0 = \left\{ \left(\frac{\lambda_1}{\mu} + 1 \right) \left(1 - \frac{(\lambda_2 + x)}{\lambda_1} \left[B^*(\lambda_1) - 1 \right] \right) \right\}^{-1},$$

$$r_1 = \frac{\lambda_1}{\mu} \left(r_0 + r_2 \right),$$

$$r_2 = -\frac{\lambda_2 + x}{\lambda_1} \left(B^*(\lambda_1) - 1 \right) r_0. \qquad (38)$$

Тут $x = x(\tau)$ *є розв'язком рівняння*

$$'(\tau) = -x(\tau)_{r0}(x) + {}_{\lambda 2 r1}(x) + ({}_{\lambda 1} + {}_{\lambda 2})_{r2}(x), \qquad (39)$$

$B^*(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \, dB(x)$ *- перетворення Лапласа-Стілтьєса.*

Доказ В системі (37) спрямуємо $\varepsilon \to 0$, позначивши n=2,отримаемо

$$F_n(w,\tau,\varepsilon) = F_n(w,\tau), \quad n = 0,1, \quad F_n(w,z,\tau,\varepsilon) = F_n(w,z,\tau),$$

$$-(\lambda_1 + \lambda_2) F_0(w,\tau) + j \frac{\partial F_0(w,\tau)}{\partial w} + \mu F_1(w,\tau) + \frac{\partial F_2(w,0,\tau)}{\partial z} = 0,$$

$$-\mu F_1(w,\tau,\varepsilon) + \lambda_1 F_0(w,\tau) + \lambda_1 F_2(w,\tau) = 0,$$

$$\frac{\partial F_2(w,z,\tau)}{\partial z} - \frac{\partial F_2(w,0,\tau)}{\partial z} - \lambda_1 F_2(w,z,\tau) + \lambda_2 B(z) F_0(w,\tau) - jB(z) \frac{\partial F_0(w,\tau)}{\partial w} = 0,$$

$$\frac{\partial F(w,\tau)}{\partial \tau} = jw \left\{ j \frac{\partial F_0(w,\tau)}{\partial w} + \lambda_2 F_1(w,\tau) + (\lambda_1 + \lambda_2) F_2(w,\tau) \right\}. \qquad (40)$$

Розв'язок системи (40) шукатимемо у вигляді

$$F_k(w,\tau) = r_k(x)e^{jwx(\tau)}, \quad k = 0,1,$$
$$F_k(w,z,\tau) = r_k(x,z)e^{jwx(\tau)}, \quad k = 2. \qquad (41)$$

Тут $x = x(\tau)$ - скалярна функція аргументу τ, яка визначає за $\varepsilon \to 0$, нормоване величиною $\varepsilon = \sigma$, середнє значення $\sigma i(\tau/\sigma)$ числа заявок на орбіті. Підставимо добуток (41) у систему (40), отримаємо

$$-(\lambda_1+\lambda_2+x)r_0(x)+\mu r_1(x)+\frac{\partial r_2(0)}{\partial z}=0,$$
$$-\mu r_1(x)+\lambda_1 r_0(x)+\lambda_1 r_2(x)=0,$$
$$\frac{\partial r_2(z)}{\partial z}-\frac{\partial r_2(0)}{\partial z}-\lambda_1 r_2(x)+(\lambda_2+x)B(z)r_0(x)=0,$$
$$x'(\tau)=-x(\tau)r_0(x)+\lambda_2 r_1(x)+(\lambda_1+\lambda_2)r_2(x). \qquad (42)$$

Позначимо $r'_k(z,x)=\frac{\partial r_k(z,x)}{\partial z}$, $r'_k(0,x)=\left.\frac{\partial r_k(z,x)}{\partial z}\right|_{z=0}$, $k = 2$, систему (42) перепишемо у вигляді:

$$-(\lambda_1+\lambda_2+x)r_0(x)+\mu r_1(x)+r_2'(0,x)=0,$$
$$-\mu r_1(x)+\lambda_1\left(r_0(x)+r_2(x)\right)=0,$$
$$r_2'(z,x)-r_2'(0,x)-\lambda_1 r_2(z,x)+(\lambda_2+x)B(z)r_0(x)=0,$$
$$x'(\tau)=-x(\tau)r_0(x)+\lambda_2 r_1(x)+(\lambda_1+\lambda_2)r_2(x). \qquad (43)$$

Позначимо $-xr_0(x) + \lambda_2 r_1(x) + (\lambda_1 + \lambda_2) r_2(x) = a(x)$.

Представляю чи ймовірності r_k як $r_k(x)$, знайдемо $r_k(x)$ із системи (43) з урахуванням умови

нормування $\sum_{k=0}^{2} r_k(x) = 1$.

Уведемо перетворення Лапласа-Стілтьєса

$$r_v^*(\alpha, x) = \int_0^\infty e^{-\alpha z} d_z r_v(z, x), \; v = 2, \; B^*(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} dB(x),$$

враховуючи, що

$$\int_0^\infty e$$

$$= -r_v'(($$

Позначивши $r_v = r_v(x)$, $r_v^*(\alpha) = r_v^*(\alpha, x)$, $v = 2$ запишемо

$$-(\lambda_1 + \lambda_2 + x) r_0 + \mu r_1 + r_2'(0) = 0,$$

$$-\mu r_1 + \lambda_1 (r_0 + r_2) = 0,$$

$$\alpha r_2^*(\alpha) - r_2'(0) - \lambda_1 r_2^*(\alpha) + (\lambda_2 + x) B^*(\alpha) r_0 = 0. \qquad (44)$$

Із другого рівняння системи (44) виразимо r_1

Покладемо в третьому рівнянні системи (44) $\alpha = \lambda_1$, отримаємо

$$r_1 = \frac{\lambda_1}{\mu}\left(r_0 + r_2\right).$$

$$r_2'(0) = (\lambda_2 + x)B^*(\lambda_1)r_0.$$

Тоді з першого рівняння системи (44) отримаємо

$$r_2 = -\frac{\lambda_2 + x}{\lambda_1}\left(B^*(\lambda_1) - 1\right)r_0.$$

З умови нормування

$$r_0 = \left\{\left(\frac{\lambda_1}{\mu} + 1\right)\left(1 - \frac{(\lambda_2 + x)}{\lambda_1}\left[B^*(\lambda_1) - 1\right]\right)\right\}^{-1},$$

$$r_1 = \frac{\lambda_1}{\mu}\left(r_0 + r_2\right),$$

$$r_2 = -\frac{\lambda_2 + x}{\lambda_1}\left(B^*(\lambda_1) - 1\right)r_0. \qquad (45)$$

Теорему доведено.

Також позначимо функцію $a(x)$

$$a(x) = -xr_0(x) + \lambda_2 r_1(x) + (\lambda_1 + \lambda_2) r_2(x), \qquad (46)$$

яка має сенс коефіцієнта перенесення дифузійного процесу, що визначає асимптотичний розподіл імовірностей числа заявок на орбіті.

2.1.1 Другий етап асимптотично дифузійного аналізу

У системі (35) і рівнянні (36) введемо заміни

$$H_k(u,t) = H_k^{(2)}(u,t)e^{j\frac{u}{\sigma}x(\sigma t)}, \quad k = 0,1,$$

$$H_2(u,z,t) = H_2^{(2)}(u,z,t)e^{j\frac{u}{\sigma}x(\sigma t)},$$

і отримаємо систему рівнянь

$$\frac{\partial H_0^{(2)}(u,t)}{\partial t} + jux'(\sigma t)H_0^{(2)}(u,t) = -\left(\lambda_1 + \lambda_2 + x(\sigma t)\right)H_0^{(2)}(u,t) +$$

$$+ j\sigma\frac{\partial H_0^{(2)}(u,t)}{\partial u} + \mu H_1^{(2)}(u,t) + \frac{\partial H_2^{(2)}(u,0,t)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial H_1^{(2)}(u,t)}{\partial t} + jux'(\sigma t)H_1^{(2)}(u,t) = (\lambda_2(e^{ju} - 1) - \mu)H_1^{(2)}(u,t) +$$

$$+\lambda_1 H_0^{(2)}(u,t) + \lambda_1 e^{ju} H_2^{(2)}(u,t),$$

$$\frac{\partial H_2^{(2)}(u,z,t)}{\partial t} + jux'(\sigma t)H_2^{(2)}(u,z,t) = \frac{\partial H_2^{(2)}(u,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial H_2^{(2)}(u,0,t)}{\partial z} +$$

$$+(\lambda_2(e^{ju} - 1) - \lambda_1)H_2^{(2)}(u,z,t) +$$

$$+(\lambda_2 + x(\sigma t)e^{-ju})B(z)H_0^{(2)}(u,t) - j\sigma e^{-ju}B(z)\frac{\partial H_0^{(2)}(u,t)}{\partial u},$$

$$\frac{\partial H^{(2)}(u,t)}{\partial t} + jux'(\sigma t)H^{(2)}(u,t) = (e^{ju} - 1)\Big\{-x(\sigma t)e^{-ju}H_0^{(2)}(u,t) +$$

$$\left. + j\sigma e^{-ju}\frac{\partial H_0^{(2)}(u,t)}{\partial u} + \lambda_2 H_1^{(2)}(u,t) + (\lambda_1 + \lambda_2)H_2^{(2)}(u,t)\right\}. \qquad (47)$$

Зробимо заміни

тоді

$$\sigma = \varepsilon^2,\ \tau = \varepsilon^2 t,\ u = \varepsilon w,\ H_k^{(2)}(u,t) = F_k^{(2)}(w,\tau,\varepsilon),\ k = 0,1,$$

$$H_2^{(2)}(u,z,t) = F_2^{(2)}(w,z,\tau,\varepsilon),$$

отримаємо систему

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon w a(x) F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) = -\left(\lambda_1 + \lambda_2 + x(\tau)\right) F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) +$$

$$+ j\varepsilon \frac{\partial F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} + \mu F_1^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) + \frac{\partial F_2^{(2)}(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z},$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F_1^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon w a(x) F_1^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) = (\lambda_2 (e^{j\varepsilon w} - 1) - \mu) F_1^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) +$$

$$+ \lambda_1 F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) + \lambda_1 e^{j\varepsilon w} F_2^{(2)}(w,\tau,\varepsilon),$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F_2^{(2)}(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon w a(x) F_2^{(2)}(w,z,\tau,\varepsilon) = \frac{\partial F_2^{(2)}(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F_2^{(2)}(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z} +$$

$$+ (\lambda_2 (e^{j\varepsilon w} - 1) - \lambda_1) F_2^{(2)}(w,z,\tau,\varepsilon) + (\lambda_2 + x e^{-j\varepsilon w}) B(z) F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) -$$

$$- j\varepsilon e^{-j\varepsilon w} B(z) \frac{\partial F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w},$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon w a(x) F^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) = (e^{j\varepsilon w} - 1)\Big\{ -x e^{-j\varepsilon w} F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) +$$

$$+ j\varepsilon e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} + \lambda_2 F_1^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) + (\lambda_1 + \lambda_2) F_2^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) \Big\}. \qquad (48)$$

Доведемо таке твердження.

Теорема 4 *Функції* $F_k^{(2)}(w,\tau)$, $k = 0,1$ *і* $F_2^{(2)}(w,z,\tau)$ *мають вигляд*

$$F_k^{(2)}(w,\tau) = \Phi(w,\tau) r_k(x), \quad k = 0,1,$$

$$F_2^{(2)}(w,z,\tau) = \Phi(w,\tau) r(x,z), \qquad (49)$$

де $r_k = r_k\ (x)$, $k = 0,1$, $r_2 = r_2\ (x, z)$, які *залежать від значень параметра* x, *визначено системою (38) у теоремі 3, а скалярна функція* $\Phi(w, \tau)$ *є розв'язком рівняння.*

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau} = a'(x)w\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial w} + b(x)\frac{(jw)^2}{2}\Phi(w,\tau)\,. \qquad (50)$$

Тут функція $a(x)$ *визначається рівністю* (46), *а скалярна функція* $b(x)$ *має вигляд*

де

$$b(x) = b(x;\tau) = a(x) + 2\left(-xg_0(x) + \lambda_2 g_1(x) + (\lambda_1+\lambda_2)g_2(x) + xr_0(x)\right). \qquad (51)$$

функції $g_k = g_k\ (x)$, $k = 0,1$, $g_2 = g_2\ (x, z)$, *враховуючи додаткову умову*

$\sum_{k}^{2} g_k = 0$, *визначаються рівносинами*

$$g_0 = \left[-\frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{\lambda_1}{\mu}+1\right)\left[a(x) - \left(a(x)-\lambda_2\right)\left(\lambda_2+x\right)B^{*\prime}(\lambda_1) + xB^*(\lambda_1)\right]r_0 - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{\lambda_1}\left(a(x)-\lambda_2\right)r_1 + r_2\right] \Big/ \left(\frac{\lambda_1}{\mu}+1\right)\left(1-\frac{\lambda_2+x}{\lambda_1}\left(B^*(\lambda_1)-1\right)\right),$$

$$g_2 = -\frac{\lambda_2+x}{\lambda_1}\left(B^*(\lambda_1)-1\right)g_0 + \frac{1}{\lambda_1}\left[a(x) - \left(a(x)-\lambda_2\right)\left(\lambda_2+x\right)B^{*\prime}(\lambda_1) + xB^*(\lambda_1)\right]r_0 +$$

$$+\frac{a(x)-\lambda_2}{\lambda_1}r_1 - r_2,$$

$$g_1 = \frac{\lambda_1}{\mu}\left(g_0+g_2\right) - \frac{a(x)-\lambda_2}{\mu}r_1 + \frac{\lambda_1}{\mu}r_2. \qquad (52)$$

Доказ. У перших трьох рівняннях системи (48) розкладемо експонентив ряд Тейлора і згрупуємо доданки порядку малості не вище ε

$$j\varepsilon w a(x) F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) = -\left(\lambda_1+\lambda_2+x\right) F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) +$$
$$+ j\varepsilon \frac{\partial F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} + \mu F_1^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) + \frac{\partial F_2^{(2)}(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z} + O(\varepsilon^2),$$
$$j\varepsilon w a(x) F_1^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) = (\varepsilon\lambda_2 - \mu) F_1^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) +$$
$$+\lambda_1 F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) + \lambda_1 (1 + j\varepsilon w) F_2^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) + O(\varepsilon^2),$$
$$j\varepsilon w a(x) F_2^{(2)}(w,z,\tau,\varepsilon) = \frac{\partial F_2^{(2)}(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F_2^{(2)}(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z} +$$
$$+(\varepsilon\lambda_2 - \lambda_1) F_2^{(2)}(w,z,\tau,\varepsilon) + (\lambda_2 + x(1 - j\varepsilon w))B(z) F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) -$$
$$- j\varepsilon B(z) \frac{\partial F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} + O(\varepsilon^2). \qquad (53)$$

Будемо шукати розв'язок системи (53) у вигляді розкладання

$$F_k^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) = \Phi\left(w,\tau\right)\{r_k + j\varepsilon w f_k\} + O\left(\varepsilon^2\right), k = 0,1,$$
$$F_2^{(2)}(w,z,\tau,\varepsilon) = \Phi\left(w,\tau\right)\{r_2(z) + j\varepsilon w f_2(z)\} + O\left(\varepsilon^2\right), \qquad (54)$$

де $r_k = r_k(x;\tau)$, $k=0,1$, $r_2(z) = r_2(x;z;\tau)$.

Отримаємо

$$j\varepsilon w a(x)\Phi(w,\tau) r_0 = -\left(\lambda_1+\lambda_2+x\right) jw\varepsilon\Phi(w,\tau) f_0 + j\varepsilon \frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial w} r_0 +$$
$$+ jw\varepsilon\Phi(w,\tau)\mu f_1 + jw\varepsilon\Phi(w,\tau)\frac{\partial f_2(0)}{\partial z} + O(\varepsilon^2),$$
$$j\varepsilon w a(x)\Phi(w,\tau) r_1 = jw\varepsilon\lambda_2\Phi(w,\tau) r_1 - jw\varepsilon\mu\Phi(w,\tau) f_1 +$$
$$+ j\varepsilon w\lambda_1\Phi(w,\tau) f_0 + j\varepsilon w\lambda_1\Phi(w,\tau) f_2 + j\varepsilon w\lambda_1\Phi(w,\tau) r_2 + O(\varepsilon^2),$$
$$j\varepsilon w a(x)\Phi(w,\tau) r_2(z) = j\varepsilon w\Phi(w,\tau)\frac{\partial f_2(z)}{\partial z} - j\varepsilon w\Phi(w,\tau)\frac{\partial f_2(0)}{\partial z} +$$

$$+ j\varepsilon w\lambda_2\Phi(w,\tau) r_2(z) - j\varepsilon w\lambda_1\Phi(w,\tau) f_2(z) +$$
$$+ jw\varepsilon(\lambda_2 + x)B(z)\Phi(w,\tau) f_0 - jw\varepsilon x B(z)\Phi(w,\tau) r_0 - j\varepsilon B(z)\frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial w} r_0 + O(\varepsilon^2).$$

Розділимо рівняння системи на $j\varepsilon w\Phi(w, \tau)$ і в межі при $\varepsilon \to 0$ отримаємо

$$-\left(\lambda_1+\lambda_2+x\right)f_0+\mu f_1+\frac{\partial f_2(0)}{\partial z}=a(x)r_0-\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)}r_0,$$

$$-\mu f_1+\lambda_1 f_0+\lambda_1 f_2=a(x)r_1-\lambda_2 r_1-\lambda_1 r_2,$$

$$\frac{\partial f_2(z)}{\partial z}-\frac{\partial f_2(0)}{\partial z}-\lambda_1 f_2(z)+(\lambda_2+x)B(z)f_0=$$

$$=a(x)r_2(z)-\lambda_2 r_2(z)+xB(z)r_0+B(z)\frac{\partial\Phi(w,\tau)/\partial w}{w\Phi(w,\tau)}r_0. \qquad (55)$$

Застосовуючи принцип суперпозиції для неоднорідних систем, розв'язок f_k , $k = 0, 1$ і $f_2(z)$ цієї системи рівнянь запишемо у вигляді суми. Позначивши $\varphi_\nu = \varphi_\nu(x)$, $g_\nu = g_\nu(x)$, $\nu = 0, 1$, $\varphi^*_2(\alpha) = \varphi^*_2(\alpha, x)$, $g^*_2(\alpha) = g^*_2(\alpha, x)$, запишемо

$$f_k=Cr_k+g_k-\varphi_k\frac{\partial\Phi\left(w,\tau\right)/\partial w}{w\Phi\left(w,\tau\right)},\ k=0,1,$$

$$f_k(z)=Cr_k(z)+g_k(z)-\varphi_k(z)\frac{\partial\Phi\left(w,\tau\right)/\partial w}{w\Phi\left(w,\tau\right)},\ k=2, \qquad (56)$$

яке підставимо в (55), отримаємо системи рівнянь

$$\frac{\partial\varphi_2(z)}{\partial z}-\frac{\partial\varphi_2(0)}{\partial z}-\lambda_1\varphi_2(z)+(\lambda_2+x)B(z)\varphi_0=-B(z)r_0. \qquad (57)$$

$$-\left(\lambda_1+\lambda_2+x\right)g_0+\mu g_1+\frac{\partial g_2(0)}{\partial z}=a(x)r_0,$$

$$-\mu g_1+\lambda_1 g_0+\lambda_1 g_2=a(x)r_1-\lambda_2 r_1-\lambda_1 r_2,$$

$$\frac{\partial g_2(z)}{\partial z}-\frac{\partial g_2(0)}{\partial z}-\lambda_1 g_2(z)+(\lambda_2+x)B(z)g_0=a(x)r_2(z)-\lambda_2 r_2(z)+xB(z)r_0. \quad (58)$$

Звернемо увагу на систему рівнянь (57). Якщо ми продиференціюємо за x систему рівнянь (42), то отримана система ідентична системі рівнянь (57), з чого можемо зробити висновок, що

$$\varphi_k = \varphi_k(x;\tau) = \frac{\partial r_k(x)}{\partial x},\ k = 0,1,\ \varphi_2 = \varphi_2(x;z;\tau) = \frac{\partial r_2(x;z)}{\partial x},\ \sum_{k=0}^{2}\varphi_k = 0,$$

де останнє співвідношення отримано шляхом диференціювання умови нормування для розподілу $r_k(x)$ за x.

Далі розглянемо систему рівнянь (58). Ця система має нескінченне число розв'язків, тому що визначник матриці системи дорівнює нулю і ранг матриці системи збігається з рангом розширеної матриці

системи. Накладемо на невідомі g_k додаткову умову, отримаємо $\sum_{k=0}^{2} g_k = 0$ і систему рівнянь

$$-\left(\lambda_1 + \lambda_2 + x\right) g_0 + \mu g_1 + \frac{\partial g_2(0)}{\partial z} = a(x) r_0,$$

$$-\mu g_1 + \lambda_1 g_0 + \lambda_1 g_2 = a(x) r_1 - \lambda_2 r_1 - \lambda_1 r_2,$$

$$\frac{\partial g_2(z)}{\partial z} - \frac{\partial g_2(0)}{\partial z} - \lambda_1 g_2(z) + (\lambda_2 + x) B(z) g_0 =$$

$$= a(x) r_2(z) - \lambda_2 r_2(z) + x B(z) r_0,$$

$$\sum_{k=0}^{2} g_k = 0. \tag{59}$$

Позначимо $g_k{}'(z) = \frac{\partial g_k(z)}{\partial z},\ g_k{}'(0) = \left.\frac{\partial g_k(z)}{\partial z}\right|_{z=0},\ k = 2,$ систему (59) перепишем у вигляді

$$-\left(\lambda_1+\lambda_2+x\right)g_0+\mu g_1+g_2'(0)=a(x)r_0,$$

$$-\mu g_1+\lambda_1 g_0+\lambda_1 g_2=a(x)r_1-\lambda_2 r_1-\lambda_1 r_2,$$

$$g_2'(z)-g_2'(0)-\lambda_1 g_2(z)+(\lambda_2+x)B(z)g_0=a(x)r_2(z)-\lambda_2 r_2(z)+xB(z)r_0.$$

Уведемо перетворення Лапласа-Стілтьєса

$$g_\nu^*(\alpha)=\int_0^\infty e^{-\alpha z}d_z g_\nu(z),\ \ \nu=2.$$

Враховуючи, що

$$\int_0^\infty e^{-\alpha z}d_z g_\nu{}'(z)=g_\nu{}'(z)e^{-\alpha z}\Big|_{z=0}^{\infty}-\int_0^\infty g_\nu{}'(z)d_z e^{-\alpha z}=$$

$$=-g_\nu{}'(0)+\alpha\int_0^\infty e^{-\alpha z}d_z g_\nu(z)=-g_\nu{}'(0)+\alpha g_\nu{}^*(\alpha),\ \nu=2.$$

Запишемо

$$-\left(\lambda_1+\lambda_2+x\right)g_0+\mu g_1+g_2'(0)=a(x)r_0,$$

$$-\mu g_1+\lambda_1 g_0+\lambda_1 g_2=a(x)r_1-\lambda_2 r_1-\lambda_1 r_2,$$

$$\alpha g_2^*(\alpha) - g_2'(0) - \lambda_1 g_2^*(\alpha) + (\lambda_2 + x)B^*(\alpha)g_0 =$$
$$= a(x)r_2^*(\alpha) - \lambda_2 r_2^*(\alpha) + xB^*(\alpha)r_0. \qquad (60)$$

Виразимо з другого рівняння системи (60) g_1

$$g_1 = \frac{\lambda_1}{\mu}\left(g_0 + g_2\right) - \frac{a(x) - \lambda_2}{\mu} r_1 + \frac{\lambda_1}{\mu} r_2.$$

Продиференціюємо останнє рівняння системи (44) за α і покладемо $\alpha = \lambda_1$, отримаємо

$$r_2^*(\lambda_1) = -(\lambda_2 + x)B^{*\prime}(\lambda_1)r_0. \qquad (61)$$

В останньому рівнянні системи (60) покладемо $\alpha = \lambda_1$ і з урахуванням (61) отримаємо

$$g_2'(0) = (\lambda_2 + x)B^*(\lambda_1)g_0 + \left[\left(a(x) - \lambda_2\right)\left(\lambda_2 + x\right)B^{*\prime}(\lambda_1) - xB^*(\lambda_1)\right]r_0.$$

Підставляючи отримані вирази в перше рівняння системи (60), отримаємо

$$g_2 = -\frac{\lambda_2 + x}{\lambda_1}\left(B^*(\lambda_1) - 1\right)g_0 + \frac{1}{\lambda_1}\left[a(x) - \left(a(x) - \lambda_2\right)\left(\lambda_2 + x\right)B^{*\prime}(\lambda_1) + xB^*(\lambda_1)\right]r_0 +$$
$$+\frac{a(x) - \lambda_2}{\lambda_1} r_1 - r_2.$$

Враховуючи додаткову умову $\sum_{k=0}^{2} g_k = 0$, маємо

$$g_0 = \left[-\frac{1}{\lambda_1}\left(\frac{\lambda_1}{\mu}+1\right)\left[a(x)-\left(a(x)-\lambda_2\right)\left(\lambda_2+x\right)B^{*\prime}(\lambda_1)+xB^*(\lambda_1)\right]r_0 - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{\lambda_1}\left(a(x)-\lambda_2\right)r_1 + r_2 \right] \Bigg/ \left(\frac{\lambda_1}{\mu}+1\right)\left(1-\frac{\lambda_2+x}{\lambda_1}\left(B^*(\lambda_1)-1\right)\right),$$

$$g_2 = -\frac{\lambda_2+x}{\lambda_1}\left(B^*(\lambda_1)-1\right)g_0 + \frac{1}{\lambda_1}\left[a(x)-\left(a(x)-\lambda_2\right)\left(\lambda_2+x\right)B^{*\prime}(\lambda_1)+xB^*(\lambda_1)\right]r_0 +$$

$$+\frac{a(x)-\lambda_2}{\lambda_1}r_1 - r_2,$$

$$g_1 = \frac{\lambda_1}{\mu}\left(g_0+g_2\right) - \frac{a(x)-\lambda_2}{\mu}r_1 + \frac{\lambda_1}{\mu}r_2.$$

Звернемося до останнього рівняння системи (48). У цьому рівнянні згрупуємо доданки порядку малості не вище ε^2

$$\varepsilon^2\frac{\partial F^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} + j\varepsilon w a(x)F^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) = \left(j\varepsilon w + \frac{\left(j\varepsilon w\right)^2}{2}\right)\left\{ j\varepsilon\frac{\partial F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} - \right.$$

$$\left. -x(1-jw\varepsilon)F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) + \lambda_2 F_1^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) + (\lambda_1+\lambda_2)F_2^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)\right\} + O(\varepsilon^3).$$

Підставимо розкладання (54) в отримане рівняння з урахуванням (43)

$$\varepsilon^2\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau} + (j\varepsilon w)^2 a(x)\Phi(w,\tau)\sum_{k=0}^{2} f_k = j\varepsilon w\left\{ j\varepsilon\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial w}r_0 + \right.$$

$$\left. + jw\varepsilon x\Phi(w,\tau)r_0 - jw\varepsilon x\Phi(w,\tau)f_0 + jw\varepsilon\lambda_2\Phi(w,\tau)f_1 + jw\varepsilon(\lambda_1+\lambda_2)\Phi(w,\tau)f_2\right\} +$$

$$+\frac{\left(j\varepsilon w\right)^2}{2}\left\{-x\Phi(w,\tau)r_0 + \lambda_2\Phi(w,\tau)r_1 + (\lambda_1+\lambda_2)\Phi(w,\tau)r_2\right\} + O(\varepsilon^3).$$

Розділимо рівняння на ε^2 і перейдемо до межі при $\varepsilon \to 0$

$$\frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial \tau} = (jw)^2 \left\{ -a(x) \sum_{k=0}^{2} f_k + xr_0 - xf_0 + \lambda_2 f_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) f_2 \right\} \Phi(w,\tau) +$$

$$+ j^2 w \frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial w} r_0 + \frac{(jw)^2}{2} \left\{ -xr_0 + \lambda_2 r_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) r_2 \right\} \Phi(w,\tau),$$

в яке підставимо розкладання (56):

$$\frac{\partial \Phi(w,\tau)}{\partial \tau} = (jw)^2 \left\{ xr_0 - xg_0 + \lambda_2 g_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) g_2 \right\} \Phi(w,\tau) -$$

$$-(jw)^2 \left\{ -x\varphi_0 + \lambda_2 \varphi_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)\varphi_2 - r_0 \right\} \frac{\partial \Phi(w,\tau) / \partial w}{w} +$$

$$+ \frac{(jw)^2}{2} \left\{ -xr_0 + \lambda_2 r_1 + (\lambda_1 + \lambda_2) r_2 \right\} \Phi(w,\tau).$$

Звернемо увагу на множник

$$-x\varphi_0 + \lambda_2 \varphi_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)\varphi_2 - r_0 =$$

$$= -x \frac{\partial r_0(x)}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial r_1(x)}{\partial x} + (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\partial r_2(x)}{\partial x} - r_0(x) = a'(x).$$

Позначимо також

$$b(x) = b(x;\tau) = a(x) + 2(-xg_0(x) + \lambda\, g_{21}(x) + (\lambda_1 + \lambda_2) g_2(x) + xr_0(x)). \qquad (62)$$

Тоді наше рівняння перепишеться у вигляді

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau} = a'(x)w\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial w} + b(x)\frac{(jw)^2}{2}\Phi(w,\tau), \qquad (63)$$

Яке збігається з (50). **Теорему доведено.**

2.1.2 Побудова дифузійної апроксимації

Реалізація методу асимптотично дифузійного аналізу для знаходження розподілу ймовірностей значень граничного за σ → 0 процесу числа *i*(*t*) заявок на орбіті аналізованої RQ-системи M_2 |M, GI|1 з пріоритетними заявками аналогічна реалізації цього методу для RQ-системи M |M_{22} |1 з пріоритетними заявками в розділі 1.4.3.

2.2 Чисельна реалізація RQ-системи $_{M2|M}$, GI|1 із пріоритетними заявками

Для того щоб переконатися в правильності розв'язування RQ-системи M_2 |M, GI|1, оберемо функцію розподілу *B*(*x*) з класу експоненціальних розподілів. У такому разі ми зможемо порівняти отримані результати з рекурtнтним (ітераційним) алгоритмом (параграф 1.3).

Знайдемо розподіл імовірностей *Pstat*(*i*), реалізуючи рекурентний алгоритм у вигляді (4), і побудуємо асимптотично дифузійну апроксимацію *Pdiffusion*(*i*) у вигляді (33).

Задавши необхідні початкові параметри: λ_1 = 0,9, λ_2 = 0,5, μ = 3, для функції *B*(*x*) інтенсивність експоненціального розподілу μ_2 = 2. У таблиці 2 наведено значення відстаней для різних параметрів σ для системи M_2 |M, GI|1.

Таблиця 2 - Відстань Колмогорова Δ між рекурентнимта асимптотичним розподілами для системи M_2 |M, GI|1

	σ = 3	σ = 2,4	σ = 0,5	σ = 0,1	σ = 0,05
Δ	0,061	**0,049**	**0,022**	**0,008**	**0,006**

З даних, наведених у таблиці 2, можна сказати, що асимптотична апроксимація асимптотично дифузійного аналізу для RQ-системи M_2 |M, GI|1 побудована правильно. За однакових початкових параметрів для систем M

|M_{22} |1 і M_2 |M, GI|1 таблиця 1 і таблиця 2 збігаються, з чого можна зробити висновок про правильність розв'язання RQ-системи M_2 |M, GI|1.

3 Дослідження системи M2|GI2|1 з повторними викликамита пріоритетними заявками

3.1 Математична модель системи та постановка задачі

У цьому розділі наведено опис математичної моделі у вигляді RQ-системи з повторними викликами, довільним часом обслуговування непріоритетних і пріоритетних заявок.

3.1.1 Математична модель RQ-системи $_{M2|GI2|1}$ з пріоритетними заявками

Ми розглядаємо RQ-систему M $|GI_{22}$ |1 з пріоритетними заявками (рисунок 10). На вхід системи надходять два найпростіших потоки подій з інтенсивністю λ_1 і λ_2 відповідно. Якщо прилад вільний, то заявки першого і другого потоків, що надходять у систему, займають його й обслуговуються випадковий час із функцією розподілу $B_1(x)$ і $B_2(x)$ відповідно.

Якщо заявка першого потоку, що надійшла, застає прилад зайнятимобслуговуванням заявки першого потоку, вона втрачається. Якщо заявка першого потоку, що надійшла, застає прилад зайнятим обслуговуванням заявки другого потоку, вона витісняє заявку другого потоку на орбіту, де та здійснює випадкову затримку впродовж експонентного часу з параметром σ, а сама починає обслуговуватися випадковий час із функцією розподілу $B_1(x)$.Якщо заявка другого потоку, що надійшла, застає прилад зайнятим обслуговуванням заявки першого або другого потоку, вона не губиться, а йде на орбіту, де здійснює випадкову затримку протягом експоненціального часу з параметром σ.

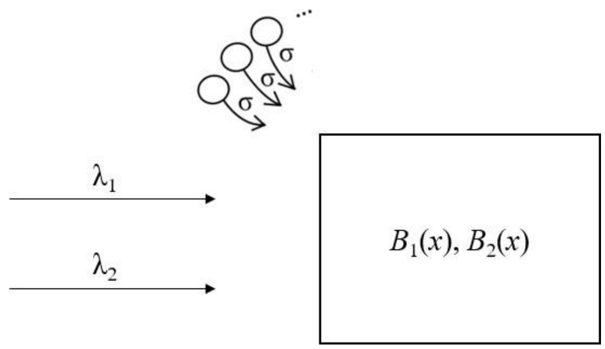


Рисунок 10 - RQ-система M $|GI_{22}$ |1 з пріоритетними заявками

Позначимо процес $k(t)$ - стан приладу в момент часу t. Цей процес може набувати таких значень: 0 - прилад вільний, 1 - прилад зайнятий обслуговуванням заявки першого потоку, 2 - прилад зайнятий обслуговуванням заявки другого потоку. Також введемо випадковий процес $i(t)$ - кількість заявок на орбіті в момент часу t. Позначимо процес $z(t)$ - залишковий час обслуговування, коли k = 1, 2.

Ставиться завдання знаходження стаціонарного розподілу ймовірностей значень процесу $\{k(t), i(t)\}$ за k = 0, 1, 2.

Для розподілу ймовірностей

$$P_k(i,t) = P\{k(t) = k, i(t) = i\},\ k = 0,$$

$$P_k(i, z, t) = P\{k(t) = k, i(t) = i, z(t) < z\},\ k = 1, 2,$$

складемо систему Колмогорова

$$\frac{\partial P_0(i,t)}{\partial t} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + i\sigma)P_0(i,t) + \frac{\partial P_1(i,0,t)}{\partial z} + \frac{\partial P_2(i,0,t)}{\partial z},$$

$$\frac{\partial P_1(i,z,t)}{\partial t} = \frac{\partial P_1(i,z,t)}{\partial z} - \frac{P_1(i,0,t)}{\partial z} - \lambda_2 P_1(i,z,t) + \lambda_1 P_0(i,t)B_1(z) +$$

$$+\lambda_2 P_1(i-1,z,t) + \lambda_1 P_2(i-1,\infty,t)B_1(z),$$

$$\frac{\partial P_2(i,z,t)}{\partial t}=\frac{\partial P_2(i,z,t)}{\partial z}-\frac{P_2(i,0,t)}{\partial z}-(\lambda_1+\lambda_2)P_2(i,z,t)+\lambda_2 B_2(z)P_0(i,t)+$$
$$+(i+1)\sigma B_2(z)P_0(i+1,t)+\lambda_2 P_2(i-1,z,t). \qquad (64)$$

Уведемо часткові характеристичні функції, позначивши $j=\sqrt{-1}$

$$H_k(u,t)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}P_k(i,t), \quad k=0,$$
$$H_k(u,z,t)=\sum_{i=0}^{\infty}e^{jui}P_k(i,z,t), \quad k=1,2.$$

Зробимо заміни в системі (64). Запишемо систему для характеристичних функцій у вигляді

$$\frac{\partial H_0(u,t)}{\partial t}=-(\lambda_1+\lambda_2)H_0(u,t)+j\sigma\frac{\partial H_0(u,t)}{\partial u}+\frac{\partial H_1(u,0,t)}{\partial z}+\frac{\partial H_2(u,0,t)}{\partial z},$$
$$\frac{\partial H_1(u,z,t)}{\partial t}=\frac{\partial H_1(u,z,t)}{\partial z}-\frac{\partial H_1(u,0,t)}{\partial z}+\lambda_2(e^{ju}-1)H_1(u,z,t)+$$
$$+\lambda_1 H_0(u,t)B_1(z)+\lambda_1 e^{ju}H_2(u,\infty,t)B_1(z),$$
$$\frac{\partial H_2(u,z,t)}{\partial t}=\frac{\partial H_2(u,z,t)}{\partial z}-\frac{\partial H_2(u,0,t)}{\partial z}+(\lambda_2(e^{ju}-1)-\lambda_1)H_2(u,z,t)+$$
$$+\lambda_2 B_2(z)H_0(u,t)-j\sigma e^{-ju}B_2(z)\frac{\partial H_0(u,t)}{\partial u}. \qquad (65)$$

У системі (65) спрямуємо $z\to\infty$ і підсумуємо рівняння, позначивши $H_k(u,t)=H_k(u,\infty,t)$, $k=1, 2$, отримаємо додаткове рівняння

$$\frac{\partial H(u,t)}{\partial t}=(e^{ju}-1)\left\{j\sigma e^{-ju}\frac{\partial H_0(u,t)}{\partial u}+\lambda_2 H_1(u,t)+(\lambda_1+\lambda_2)H_2(u,t)\right\}, \qquad (66)$$

яке нам знадобиться для подальшого аналізу. Систему (65) - (66) будемо розв'язувати методом асимптотично-дифузійного аналізу в граничній умові $\sigma \to 0$.

3.2 Метод асимптотично-дифузійного аналізу дослідження RQ-системи M2|GI2|1

3.2.1 Перший етап асимптотично дифузійного аналізу

Позначимо $\sigma = \varepsilon$, зробимо заміни

$$\tau = t\varepsilon,\ u = \varepsilon w,\ H_k(u,t) = F_k(w, \tau, \varepsilon)\ k = 0,$$

$$H_k(u,z,t) = F_k(w, z, \tau, \varepsilon),\ k = 1,2.$$

Перепишемо систему (65) - (66) у вигляді

$$\varepsilon\frac{\partial F_0(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} = -(\lambda_1+\lambda_2)F_0(w,\tau,\varepsilon) + j\frac{\partial F_0(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} + \frac{\partial F_1(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F_2(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z},$$

$$\varepsilon\frac{\partial F_1(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} = \frac{\partial F_1(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F_1(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z} + \lambda_2(e^{j\varepsilon w}-1)F_1(w,z,\tau,\varepsilon) +$$

$$+\lambda_1 F_0(w,\tau,\varepsilon)B_1(z) + \lambda_1 e^{j\varepsilon w}F_2(w,\tau,\varepsilon)B_1(z),$$

$$\varepsilon\frac{\partial F_2(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} = \frac{\partial F_2(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F_2(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z} + (\lambda_2(e^{j\varepsilon w}-1)-\lambda_1)F_2(w,z,\tau,\varepsilon) +$$

$$+\lambda_2 B_2(z)F_0(w,\tau,\varepsilon) - je^{-j\varepsilon w}B_2(z)\frac{\partial F_0(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w},$$

$$\varepsilon\frac{\partial F(w,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau} =$$

$$= (e^{j\varepsilon w} - 1)\left\{ je^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F_0(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} + \lambda_2 F_1(w,\tau,\varepsilon) + (\lambda_1 + \lambda_2) F_2(w,\tau,\varepsilon) \right\}. \qquad (67)$$

Теорема 5 *У розглянутій RQ-системі* $M\,|GI_{22}\,|1$ *компоненти граничних за* $\varepsilon \to 0$ *значень* $r_0 = r_0(x)$, $r_k = r_k(x, z)$, $k = 1, 2$ *ймовірностей станів приладу, визначаються рівносинами*

$$r_0 = \left(1 + \lambda_1 b_1^{(1)} + (\lambda_2 + x)\left(1 - B_2^*(\lambda_1)\right)\left(b_1^{(1)} + \frac{1}{\lambda_1}\right)\right)^{-1},$$

$$r_1 = \left(\lambda_1 + (\lambda_2 + x)\left(1 - B_2^*(\lambda_1)\right)\right) b_1^{(1)} r_0,$$

$$r_2 = \frac{\lambda_2 + x}{\lambda_1}\left(1 - B_2^*(\lambda_1)\right) r_0. \qquad (68)$$

Тут $x = x(\tau)$ *є розв'язком рівняння*

$$x'(\tau) = -x(\tau) r_0(x) + \lambda_2 r_1(x) + (\lambda_1 + \lambda_2) r_2(x), \qquad (69)$$

$b_1^{(1)}$ - *перший момент функції розподілу ймовірностей* $B_1(x)$,

$B_2^*(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x} dB_2(x)$ - *перетворення Лапласа-Стілтьєса функції*

розподілу ймовірностей $B_2(x)$.

Доведення теореми 5 аналогічне доказу теореми 3.

Також позначимо функцію $a(x)$

$$a(x) = {}_{-xr0}(x) + {}_{\lambda 2r1}(x) + ({}_{\lambda 1} + {}_{\lambda 2})_{r2}(x), \qquad (70)$$

яка має сенс коефіцієнта перенесення дифузійного процесу, що визначає асимптотичний розподіл імовірностей числа заявок на орбіті.

3.2.2 Другий етап асимптотично дифузійного аналізу

У системі (65) і рівнянні (66) введемо заміни

$$H_0(u,t) = H_0^{(2)}(u,t)e^{j\frac{u}{\sigma}x(t)},$$

$$H_k(u,z,t) = H_k^{(2)}(u,z,t)e^{j\frac{u}{\sigma}x(t)}, \qquad k = 1, 2,$$

і отримаємо систему рівнянь

$$\begin{gathered}
\frac{\partial H_0^{(2)}(u,t)}{\partial t} + jux'(\sigma t)H_0^{(2)}(u,t) = -\left(\lambda_1 + \lambda_2 + x(\sigma t)\right)H_0^{(2)}(u,t) + \\
+ j\sigma\frac{\partial H_0^{(2)}(u,t)}{\partial u} + \frac{\partial H_1^{(2)}(u,0,t)}{\partial z} + \frac{\partial H_2^{(2)}(u,0,t)}{\partial z}, \\
\frac{\partial H_1^{(2)}(u,z,t)}{\partial t} + jux'(\sigma t)H_1^{(2)}(u,z,t) = \frac{\partial H_1^{(2)}(u,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial H_1^{(2)}(u,0,t)}{\partial z} + \\
+\lambda_2(e^{ju}-1)H_1^{(2)}(u,z,t) + \lambda_1 H_0^{(2)}(u,t)B_1(z) + \lambda_1 e^{ju}H_2^{(2)}(u,t)B_1(z), \\
\frac{\partial H_2^{(2)}(u,z,t)}{\partial t} + jux'(\sigma t)H_2^{(2)}(u,z,t) = \frac{\partial H_2^{(2)}(u,z,t)}{\partial z} - \frac{\partial H_2^{(2)}(u,0,t)}{\partial z} + \\
+(\lambda_2(e^{ju}-1) - \lambda_1)H_2^{(2)}(u,z,t) + \\
+(\lambda_2 + x(\sigma t)e^{-ju})B_2(z)H_0^{(2)}(u,t) - j\sigma e^{-ju}B_2(z)\frac{\partial H_0^{(2)}(u,t)}{\partial u}, \\
\frac{\partial H^{(2)}(u,t)}{\partial t} + jux'(\sigma t)H^{(2)}(u,t) = (e^{ju}-1)\times\Big\{-x(\sigma t)e^{-ju}H_0^{(2)}(u,t) + \\
\left. + j\sigma e^{-ju}\frac{\partial H_0^{(2)}(u,t)}{\partial u} + \lambda_2 H_1^{(2)}(u,t) + (\lambda_1 + \lambda_2)H_2^{(2)}(u,t)\right\}. \qquad (71)
\end{gathered}$$

Зробимо заміни

$$\sigma = \varepsilon^2,\ \tau = \varepsilon^2 t,\ u = \varepsilon w,\ H_k^{(2)}(u,t) = F_k^{(2)}(w,\tau,\varepsilon),\ k = 0,$$

$$H_k^{(2)}(u,z,t) = F_k^{(2)}(w,z,\tau,\varepsilon),\ k = 1,2,$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon w a(x) F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) = -\left(\lambda_1 + \lambda_2 + x(\tau)\right) F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) +$$

$$+ j\varepsilon \frac{\partial F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} + \frac{\partial F_1^{(2)}(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z} + \frac{\partial F_2^{(2)}(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z},$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F_1^{(2)}(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon w a(x) F_1^{(2)}(w,z,\tau,\varepsilon) = \frac{\partial F_1^{(2)}(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F_1^{(2)}(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z} +$$

$$+\lambda_2 (e^{j\varepsilon w} - 1) F_1^{(2)}(w,z,\tau,\varepsilon) + \lambda_1 F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) B_1(z) + \lambda_1 e^{j\varepsilon w} F_2^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) B_1(z),$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F_2^{(2)}(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon w a(x) F_2^{(2)}(w,z,\tau,\varepsilon) = \frac{\partial F_2^{(2)}(w,z,\tau,\varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F_2^{(2)}(w,0,\tau,\varepsilon)}{\partial z} +$$

$$+(\lambda_2 (e^{j\varepsilon w} - 1) - \lambda_1) F_2^{(2)}(w,z,\tau,\varepsilon) +$$

$$+(\lambda_2 + x e^{-j\varepsilon w}) B_2(z) F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) - j\varepsilon e^{-j\varepsilon w} B_2(z) \frac{\partial F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w},$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial F^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} + j\varepsilon w a(x) F^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) = (e^{j\varepsilon w} - 1) \times \Big\{ -x e^{-j\varepsilon w} F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) +$$

$$\left. + j\varepsilon e^{-j\varepsilon w} \frac{\partial F_0^{(2)}(w,\tau,\varepsilon)}{\partial w} + \lambda_2 F_1^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) + (\lambda_1 + \lambda_2) F_2^{(2)}(w,\tau,\varepsilon) \right\}. \qquad (72)$$

Доведемо таке твердження.

Теорема 6 *Функції* $F_0^{(2)}(w,\tau)$ *і* $F_k^{(2)}(w,z,\tau)$, k = *1,2 мають вигляд*

$$F_0^{(2)}(w,\tau) = \Phi\big(w,\tau\big) r_0(x),$$

$$F_k^{(2)}(w,z,\tau) = \Phi\big(w,\tau\big) r_k(x,z),\ \ k = 1,2, \qquad (73)$$

де $r_0 = r_0\ (x)$, $r_k = r_k\ (x,\ z)$, $k = 1,2$, які *залежать від значень параметра x, визначено системою* (68) *у теоремі 5*, *а скалярна функція* $\Phi(w, \tau)$ *є розв'язком рівняння*

$$\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial\tau} = a'(x)w\,\frac{\partial\Phi(w,\tau)}{\partial w} + b(x)\,\frac{\left(jw\right)^2}{2}\Phi(w,\tau)\,. \qquad (74)$$

Тут функція $a(x)$ *визначається рівністю* (70), *а скалярна функція* $b(x)$ *має вигляд*

$$b(x) = b(x;\tau) = a(x) + 2\left(-xg_0(x) + \lambda_2 g_1(x) + (\lambda_1+\lambda_2)g_2(x) + xr_0(x)\right). \qquad (75)$$

де функції $g_0 = g_0\ (x)$, $g_k = g_k\ (x,\ z)$, $k = 1,2$, *враховуючи додаткову умову* $\sum_{k=0}^{2} g_k = 0$, *визначаються рівносинами*

$$g_0 = \frac{(a(x)-\lambda_2)\lambda_1 b_1^{(2)}}{2}\left(r_0+r_2\right) - \frac{\lambda_1 b_1^{(1)}+1}{\lambda_1}\Big[\Big(a(x) - \left(a(x)-\lambda_2\right)\left(\lambda_2+x\right)B_2^{*\prime}(\lambda_1) + xB_2^{*}(\lambda_1)\Big)r_0 + \left(a(x)-\lambda_2\right)r_1\Big] + r_2 \Bigg/ \left(1+\lambda_1 b_1^{(1)}\right)\left(1-\frac{\lambda_2+x}{\lambda_1}\left(B_2^{*}(\lambda_1)-1\right)\right),$$

$$g_2 = -\frac{\lambda_2+x}{\lambda_1}\left(B_2^{*}(\lambda_1)-1\right)g_0 + \frac{1}{\lambda_1}\Big[a(x) - \left(a(x)-\lambda_2\right)\left(\lambda_2+x\right)B_2^{*\prime}(\lambda_1) + xB_2^{*}(\lambda_1)\Big]r_0 + \frac{a(x)-\lambda_2}{\lambda_1}r_1 - r_2,$$

$$g_1 = \lambda_1(g_0+g_2)b_1^{(1)} - \frac{\left(a(x)-\lambda_2\right)\lambda_1 b_1^{(2)}}{2}\left(r_0+r_2\right) + \lambda_1 b_1^{(1)} r_2, \qquad (76)$$

де $b_1^{(1)}, b_1^{(2)}$ - *перший и другий моменти функції розподілу ймовірностей B_1 (x) відповідно.*

Доведення теореми 6 аналогічне доказу теореми 4.

3.2.3 Побудова дифузійної апроксимації

Реалізація методу асимптотично дифузійного аналізу для знаходження розподілу ймовірностей значень граничного за $\sigma \to 0$ процесу числа $i(t)$ заявок на орбіті аналізованої RQ-системи M $|GI_{22}$ |1 з пріоритетними заявками аналогічна реалізації цього методу для RQ-системи M $|M_{22}$ |1 з пріоритетними заявками в розділі 1.4.3.

3.3 Чисельна реалізація RQ-системи M2|GI2|1 із пріоритетними заявками

Для того щоб переконатися в правильності розв'язання RQ-системи M $|GI_{22}$ |1, оберемо функції розподілу B_1 (x) і B_2 (x) з класу експоненціальних розподілів. У такому разі ми зможемо порівняти отримані результати з рекурентним (ітераційним) алгоритмом (параграф 1.3).

Знайдемо розподіл імовірностей *Pstat*(*i*), реалізуючи рекурентний алгоритм у вигляді (4), і побудуємо асимптотично дифузійну апроксимацію *Pdiffusion*(*i*) у вигляді (33).

Задавши необхідні початкові параметри: $\lambda_1 = 0{,}9$, $\lambda_2 = 0{,}5$, для функції B_1 (x) інтенсивність експоненціального розподілу $\mu_1 = 3$, для функції B_2 (x) інтенсивність експоненціального розподілу $\mu_2 = 2$. У таблиці 3 наведено значення відстаней для різних параметрів σ для системи M |GI |1.$_{22}$

Таблиця 3 - Відстань Колмогорова Δ між рекурентнимта асимптотичним розподілами для системи M |GI |1$_{22}$

	σ = 3	σ = 2,4	σ = 0,5	σ = 0,1	σ = 0,05
Δ	0,061	**0,049**	**0,022**	**0,008**	**0,006**

З даних, наведених у таблиці 3, можна сказати, що асимптотичну апроксимацію дифузійного аналізу для RQ-системи M |GI$_{22}$ |1 побудовано правильно. За однакових початкових параметрів для систем M |M$_{22}$ |1 і M
|GI$_{22}$ |1 таблиця 1 і таблиця 3 збігаються, з чого можна зробити висновок про правильність розв'язання RQ-системи M |GI |1.$_{22}$

Висновок

В ході проведеного дослідження пріоритетних і циклічних систем з повторюваними викликами було виявлено кілька важливих аспектів, що впливають на продуктивність і якість обслуговування в сучасних системах масового обслуговування. Аналіз літературних джерел дозволив нам виявити основні концепції та моделі, що використовуються в теорії масового обслуговування, особливо з огляду на пріоритетність застосування та наявність кільцевих структур у системі обслуговування.

Математичне моделювання цих систем дозволило розробити структуровані моделі, що враховують стохастичні характеристики процесу. Використання методів асимптотичного аналізу було ключовим для отримання аналітичних результатів та вдосконалення стратегій управління. Основні результати включають визначення оптимальної стратегії управління системою з урахуванням пріоритетів і періодичних процесів. Отримані результати можуть бути використані для підвищення продуктивності реальних систем обслуговування в галузях, де важливо враховувати різноманітність застосувань і завдань.

Важливим кроком є практична реалізація отриманої стратегії управління та її впровадження в реальну систему масового обслуговування. Це допомагає підвищити ефективність, скоротити час очікування та покращити якість обслуговування для різних класів додатків.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бабкін Є. О. Про методологію імітаційного моделювання бізнес-процесів на основі агентного та дискретно-подієвого підходів / О. О. Бабкін, О. В. Копиця // Auditorium. - 2016. - №2 (10). - С. 72 - 77.

2. Башарін Г. П. Новий етап розвитку математичної теорії телетрафіку / Г. П. Башарін, К. Є. Самуйлов, Н. В. Яркіна, І. А. Гудкова // Автоматика і телемеханіка. - 2009. - № 12. - С. 16 - 28.

3. Бочаров П. П. Про однолінійну обслуговуючу систему з обмеженим числом місць для очікування і пріоритетами // Пробл. передачі інформ. - 1970. С. 70 - 77.

4. Воскобойников Ю. Є. Основи обчислень і програмування в пакеті MathCAD PRIME / Ю. Є. Воскобойников, О. Ф. Задорожний. - СПб.: Лань, 2016. - 224 с.

5. В'юненко, Л.Ф. Імітаційне моделювання. підручник і практикум для академічного бакалаврату / Л.Ф. В'юненко, М.В. Михайлов, Т.Н. Первозванська. - Люберці: Юрайт, 2016. - 283 с.

6. Гнєденко Б. В. Вступ до теорії масового обслуговування : навчальний посібник / Б. В. Гнєденко, І. М. Коваленко. - 4-е изд. - М. : изд-во ЛКИ, 2007. - 400 с.

7. Геддіс Т. Починаємо програмувати на Python / Т. Геддіс. - СПб.: БХВ-Петербург, 2019. - 768 с.

8. Доусон М. Програмуємо на Python / М. Доусон. - СПб. : Пітер, 2014. - 416 с.

9. Кір'янов Д. В. Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0 / Д. В. Кір'янов. - СПб.: БХВ-Петербург, 2012. - 432 с.: іл. + Відеокурс.

10. Клейнрок Л. Теорія масового обслуговування : пер. з англ. І. І. Грушко / Л. Клейнрок ; ред. В. І. Нейман. - М.: Машинобудування,1979. - 432 с.

11. Ключникова П. Н. Дослідження циклічної системи з повторними викликами / П. Н. Ключникова, С. В. Пауль // Матеріали міжнародної наукової конференції "Математичне та програмне забезпечення інформаційних, технічних та економічних систем", Томськ, 28-30 травня 2020 р. 2020. С. 270 - 277.

12. Лазуков М. Р. Алгоритми аналізу характеристик систем масового обслуговування з відносним пріоритетом // StudNet. - 2020. -
№10. С. 229 - 235.

13. Любанович Б. Простий Python. Сучасний стиль програмування / Б. Любанович. - СПб. : Пітер, 2016. - 480 с.

14. Любіна Т. В. Дослідження марковської динамічної RQ-системи з конфліктами заявок / Т. В. Любіна, А. А. Назаров // Вісник Томського державного університету. Управління, обчислювальна техніка та інформатика. - 2010. - № 3 (12). - С. 73 - 84.

15. Мінакова О. В. Розробка програмних інструментів на базі розширюваних платформ з відкритим вихідним кодом / О. В. Мінакова,
Н. В. Акамсіна, О. В. Курипта // Вісник ВДТУ. - 2022. - №4. - С. 56 - 63.

16. Моісеєв А. Н. Розроблення об'єктно-орієнтованої моделі системи імітаційного моделювання процесів масового обслуговування / А. Н. Моісеєв, М. В. Синяков // Вісник Томського державного університету. Управління, обчислювальна техніка та інформатика. - 2010. -
№ 1. - С. 89 - 93.

17. Моісеєва О. О. Дослідження RQ-системи MMPP|GI|1 методом асимптотичного аналізу в умові великого завантаження / О. О. Моісеєва, О. О. Назаров // Вісник Томського державного університету. Управління, обчислювальна техніка та інформатика. - 2013. - № 4 (25). - С. 84 - 94.

18. Назаров А. А. Дослідження циклічної системи з повторними викликами / А. А. Назаров, С. В. Пауль, П. М. Ключникова // Розподілені

комп'ютерні та телекомунікаційні мережі: управління, обчислення, зв'язок (DCCN-2020) [Електронний ресурс] : матеріали XXIII Міжнародної наукової конференції (14-18 вересня 2020 р., Москва, Росія). М., 2020. С. 540 - 547.

19. Назаров О. О. Дослідження RQ-системи M|GI|1 методом асимптотичного аналізу в умові великого завантаження / О. О. Назаров, О. О. Моісеєва // Матеріали міжнародної наукової конференції "Сучасні ймовірнісні методи аналізу, проектування та оптимізації інформаційно-телекомунікаційних мереж", 22. - 2013. - С. 106-113.

20. Назаров А. А. Дослідження RQ-системи M|GI|1 з витісненням за умови великої затримки / А. А. Назаров, Я. Є. Чернікова // Известия Томского политехнического университета. - 2013. - Т. 323, № 5. - С. 16 - 20.

21. Назаров О. О. Дослідження RQ-системи M|M|1|1 з викликуваними заявками методом асимптотично-дифузійного аналізу / О. О. Назаров, С. В. Пауль, О. Д. Лізюра // Розподілені комп'ютерні та телекомунікаційні мережі: управління, обчислення, зв'язок (DCCN-2019) : матеріали XXII Міжнародної наукової конференції. Москва, 23-27 вересня 2019 р. - М., 2019. - С. 148 - 155.

22. Назаров А. А. Дослідження RQ-системи m|m|1 з фазовим розподілом повторного часу / А. А. Назаров, М. І. Яковлєв // Вістн. Том. держ. ун-ту. Управління, обчислювальна техніка та інформатика. - 2014. - №2 (27). - С. 39 - 46.

23. Назаров А. А. Немарковська динамічна RQ-система із вхідним MMP-потоком заявок / А. А. Назаров, Т. В. Любіна // AiT. - 2013. - No 7. - С. 89 - 101.

24. Осипов Г. С. Дослідження систем масового обслуговування з пріоритетними заявками // Бюлетень науки і практики. - 2017. - №1 (14). - С. 17 - 24.

25. Полховська А. В. Імовірнісна модель системи спільного доступу з колізіями, Н-стійкістю та відмовами / О . В. Полховська, О. Ю. Данилюк, С. П. Моісеєва, О. С. Бобкова // Вісник Томського державного університету. Управління, обчислювальна техніка та інформатика. - 2022. - № 58. - С. 35 - 46.

26. Савінов Ю. Г. Математична та комп'ютерна модель багатоканальної СМО з дообслуговуванням заявок / Ю . Г. Савінов, О. О. Чурова // Вчені записки УлГУ. Сер. Математика та інформаційні технології. УлГУ. Електрон. журн. - 2017. - № 1. - С. 61 - 69.

27. Савінов Ю. Г. Математична та комп'ютерна модель багатоканальної СМО з відносним пріоритетом в обслуговуванні / Ю. Г. Савінов, М. В. Ісмаїлова // Вчені записки УлГУ. Сер. Математика та інформаційні технології. УлГУ. Електронний. журн. - 2017. - № 1. - С. 54 - 60.

28. Сонькін М. О. Об'єктна модель додатка для імітаційного моделювання циклічних систем масового обслуговування / М. О. Сонькін, О. М. Моїсеєв, Д. М. Сонькін, Д. О. Буртова // Вісник Томського державного університету. Управління, обчислювальна техніка та інформатика. - 2017. - № 40. - С. 71 - 79.

29. Степанов С. М. Чисельні методи розрахунку систем із повторними викликами / С. М. Степанов - М. : Наука, 1983. - 230 с.

30. Федоров Д. Ю. Програмування мовою високого рівня Python : навчальний посібник для прикладного бакалаврату / Д. Ю. Федоров. - 2-е изд., перераб. і доп. - Москва : Видавництво Юрайт, 2019. - 161 с.

31. Циціашвілі Г. Ш. Стаціонарний розподіл у найпростішій RQ-системі масового обслуговування / Г. Ш. Циціашвілі, М. О. Осипова // Вісник Том. держ. ун-та. Управління, обчислювальна техніка та інформатика. - 2019. - № 46. - С. 93 - 97.

32. Чекменьов В. А. Багатокритеріальна оптимізація пріоритетних

систем обслуговування, що функціонують в умовах конкуренції вхідних потоків / В. А. Чекменьов, Т. Д. Чекменьова // Вісник КемДУ. - 2014. - №1 (57). - С. 55 - 59.

33. Чернікова (Ізмайлова) Я. Е. Асимптотичний аналіз RQ-системи з r-стійким витісненням альтернативних заявок / Я. Є. Чернікова (Ізмайлова) // Труди / Томський державний університет. Серія фізико-математична. - 2015. - Т. 297 : Математичне та програмне забезпечення інформаційних, технічних та економічних систем : матеріали III всеросійської молодіжної наукової конференції. - С. 143-149.

34. Шимановська М. В. Модель СМО з неоднорідними заявками й абсолютним пріоритетом обслуговування // Вісник Пермського університету. Серія: Математика. Механіка. Інформатика. - 2013 - №4 (23). - С. 103 - 107.

35. Абе К. Дифузійна межа модифікованої системи Ерланга-Б з часом зондування вторинних користувачів / К. Абе. Abe, T. Phung-Duc // Annals Oper. Res. - 2022. - С. 1 - 22.

36. Арталехо Х. Р. Доступна бібліографія про черги повторних судових засідань // Прогрес у 2000-2009 роках у галузі математичного та комп'ютерного моделювання. - 2010. - Vol. 51. - P. 1071 - 1081.

37. Арталехо Х. Р. Класифікована бібліографія досліджень про черги повторних судових засідань // Прогрес у 1990 - 1999 роках. - 1999. - Vol. 7, Issue 2. - P. 187 - 211.

38. Artalejo J. R. Retrial Queuing Systems: a Computational Approach /
Artalejo J. R. Retrial Queuing Systems: a Computational Approach / J. R. Artalejo, A. Gómez-Corral. - Berlin : Springer-Verlag, 2008. - 318 p.

39. Cohen J. W. Basic problems of telephone trafic and the influence of repeated calls // Philips Telecommunication Review. - 1957. - Vol. 18, №. 2. - P. 49 - 100.

40. Фалін Г. І. Черги повторних судових засідань / Г. І. Falin, J. G. C. Templeton. - London : Chapman & Hall, 1997. - 320 p.

41. Gosztony G. Повторні спроби виклику та їхній вплив на інженерію трафіку
// Budavog Telecommunication Review. - 1976. - Vol. 2. - P. 16 - 26.
42. Khan M. F. Routing Schemes in FANETs: A Survey / M. F. Khan. F. Khan,
K. - L. A. Yau, R. M. Noor, M. A. Imran // Sensors 2020. - 2020. n. pag.
43. Кім Дж. Система черги повторних розглядів із зіткненням і нетерплячістю // Commun. Korean Math. Soc. - 2010. - № 4. - P. 647 - 653.
44. Клименок В. Ретриальна тандемна черга з двома типами клієнтів і резервуванням каналів / В. Клименок, Р. Савко // Зв'язки в галузі комп'ютерних та інформаційних наук. - 2013. - Vol. 356 : Сучасні ймовірнісні методи аналізу телекомунікаційних мереж : Матеріали Білоруського зимового семінару з теорії масової черги (BWWQT-2013). - P. 105 - 114.
45. Крішна Ріді Г. V. A Non-preemptive Priority Multi-server Queuing System with General Bulk Service and Hertergeneous Arrivals (Система черги з декількома серверами без випереджального пріоритету з загальним об'ємним обслуговуванням і різнорідними прибуттями) / G. V. Krishna Reedy, R. Nadarajan // Computer Operations Research - 1993. - №4. - C. 447 - 453.
46. Моісеєв А. Асимптотичний дифузійний аналіз багатосерверної черги ретриалів із гіперекспоненціальним обслуговуванням [Електронний ресурс] / А. Моісеєв. Моисеев,
А. Назаров, С. Пол // Математика. - 2020. - Vol. 8, № 4. - Номер статті 531. - 16 p.
47. Мойсеєв А. Дискретно-подієвий підхід до моделювання мереж масового обслуговування / А. Мойсеєв. Мойсеєв, А. Дьомін, В. Дорофєєв, В. Сорокін // Ключові інженерні матеріали. - 2016. - Vol. 685. - P. 939 - 942.
48. Назаров А. Циклічна система масового обслуговування з пріоритетними клієнтами та Т-стратегією обслуговування / А. Назаров.

Назаров, С. Пол // Communications in Computer and Information Science. - 2016.
- Vol. 678. - P. 182-193.

49. Назаров А. Кількість клієнтів у системі з серверними відпустками / А. Назаров, С. Пол //CCIS. Назаров, С. Пол //CCIS. - 2016. - Vol. 601. - P. 334 - 343.

50. Назаров А. Асимптотичний аналіз системи ретриального масового обслуговування M/GI/1 з гіперекспоненціальним розподілом часу затримки на орбіті та виключенням альтернативних клієнтів / А. Назаров // А. Назаров. Назаров, Я. Ізмайлова // Зв'язки в галузі комп'ютерних та інформаційних наук. - 2016. - Vol. 638. - P. 292 - 302.